

BIBL. NAZ.

itt Emanuele III

Stall
Herring
B

568

NAPOLI



453 Rue St Martin N. 568

ELEMENTI

DI

ARITMETICA

Dell' Abate FAZZINI.

196

~~~~~  
TERZA EDIZIONE.  
~~~~~



NAPOLI
DALLA STAMPERIA FRANCESE
~~~~~  
1829.

BIBL. NAZ  
Vitt. Emanuele III

Racc.

De Marinis

B

568

NAPOLI

## AL LETTORE.

---

*DOVENDO ristampare i miei Elementi di Aritmetica, ho pensato di esporli in un metodo puramente analitico, acciocchè i giovani studiosi si trovino meglio preparati al corso dell'Algebra. Ma siccome allo studio dell'Aritmetica quello della Geometria per lo più accoppiar si suole, e negli Elementi di questa le voci Teorema, Problema ec. spesso s'incontrano, così credo far cosa grata ai principianti soggiungendone qui appresso le definizioni.*

### DEFINIZIONI.

#### 1.

Tutto ciò che può ricevere accrescimento o diminuzione, tutto ciò di cui si può concepire il doppio, il triplo, il quadruplo ec. la metà, la terza parte, la quarta parte ec. si chiama *quantità* ovvero *grandezza*. Tali sono i numeri, le linee, i pesi, il tempo, ec.

#### 2.

Si dice *quantità discreta* quella le cui parti sono tra loro realmente distinte: come sono i

( IV )

numeri. Ma si dice *quantità continua* quella che è divisibile in parti, le quali in atto sono unite per la formazione del tutto: come sono le linee, le superficie ec.

3.

La *Matematica* è quella scienza che ha per oggetto la grandezza.

4.

La *Geometria* è la scienza delle quantità continue, e dà le regole di poterle misurare.

5.

L' *Aritmetica* è la scienza de' numeri, e dà le regole di poterli combinare.

6.

L' *Assioma* è una proposizione che contiene una verità, la quale si comprende senza bisogno della dimostrazione: come il tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti.

7.

Il *Teorema* è una proposizione che contiene una verità, la quale non si può capire senza la dimostrazione.

8.

Il *Problema* è una proposizione con la quale si dimanda un'operazione, il cui compimento non si può comprendere senza la dimostrazione.

9.

Il *Postulato*, in matematica, è la convenzione su qualche principio della scienza così chiaro e facile, che ognuno vi dee acconsentire.

10.

Il *Lemma* è una proposizione in cui si stabilisce un principio, che dee servire alla dimostrazione di un Teorema, o alla soluzione di un Problema.

11.

Il *Corollario* è una conseguenza per cui si deduce una verità incidente da una proposizione già dimostrata.

Lo *Scolio* è ciò che si aggiunge ad una proposizione, per rendere più chiara la dottrina che in essa si contiene.



# INDICE

## DE' CAPITOLI.

---

|                                                                           |               |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <i>DEFINIZIONI generali , e sistema della numerazione.....</i>            | <i>Pag. 1</i> |
| <i>Dell' addizione.....</i>                                               | <i>10</i>     |
| <i>Della sottrazione.....</i>                                             | <i>13</i>     |
| <i>Delle prove dell' addizione e della divisione.....</i>                 | <i>25</i>     |
| <i>Della moltiplicazione.....</i>                                         | <i>29</i>     |
| <i>Della divisione.....</i>                                               | <i>42</i>     |
| <i>Delle prove della moltiplicazione e della divisione.....</i>           | <i>65</i>     |
| <i>Della ricerca de' fattori de' numeri.....</i>                          | <i>69</i>     |
| <i>Delle frazioni.....</i>                                                | <i>71</i>     |
| <i>Del calcolo delle frazioni.....</i>                                    | <i>83</i>     |
| <i>De' numeri complessi.....</i>                                          | <i>89</i>     |
| <i>Delle frazioni decimali.....</i>                                       | <i>97</i>     |
| <i>Del calcolo de' decimali.....</i>                                      | <i>101</i>    |
| <i>Della formazione de' quadrati.....</i>                                 | <i>115</i>    |
| <i>Della estrazione della radice quadrata...</i>                          | <i>123</i>    |
| <i>Della formazione de' cubi.....</i>                                     | <i>129</i>    |
| <i>Della estrazione della radice cubica.....</i>                          | <i>138</i>    |
| <i>Dell' uso dell' Aritmetica, ossia delle ragioni e proporzioni.....</i> | <i>143</i>    |

( VIII )

|                                                   |                 |
|---------------------------------------------------|-----------------|
| <i>Della regola del tre semplice è diretta .</i>  | <i>pag. 153</i> |
| <i>Della regola del tre semplice ed inversa .</i> | <i>156</i>      |
| <i>Della regola del tre composta e diretta .</i>  | <i>159</i>      |
| <i>Della regola del tre composta ed inversa .</i> | <i>174</i>      |
| <i>Della regola di allegazione.....</i>           | <i>178</i>      |
| <i>Della regola di società.....</i>               | <i>182</i>      |
| <i>Della regola di falsa posizione.....</i>       | <i>186</i>      |
| <i>Delle progressioni Aritmetiche.....</i>        | <i>190</i>      |
| <i>Delle progressioni geometriche.....</i>        | <i>195</i>      |
| <i>Delle regole d'interesse.....</i>              | <i>199</i>      |
| <i>Appendice de' numeri complessi.....</i>        | <i>207</i>      |

---

# ELEMENTI

DI

## ARITMETICA.

---

*Definizioni generali, e sistema  
della numerazione.*

1. **N**OI diciamo *un* libro, *una* casa, *un* reggimento, sebbene il libro sia composto di molti fogli, il reggimento di molti soldati, la casa di più stanze, perchè consideriamo le parti loro come unite inseparabilmente per costituire un tutto. La denominazione estrinseca per la quale concepiamo qualche cosa come non divisa, dicesi *unità*: ovvero, al dir di Euclide, l'*unità* è ciò per cui ciascuna delle cose che sono chiamasi una.

2. L'*unità* è il principio de' numeri, poichè basta aggiungerla una volta a se medesima per aver due; se uniscasi anche una unità alle due precedenti, si avrà tre; e così aggiungendo l'*unità* continuamente a se medesima si formeranno tutti i numeri.

3. Il *numero* dunque è la collezione di più unità; e siccome per quanto grande sia un numero, si può sempre ad esso aggiungere l'*unità* e fare un numero anche maggiore, chiaramente si scorge la serie de' numeri essere illimitata. Ma i numeri *semplici* sono quelli che non oltrepassano

sano le nove unità, ogni altro numero dicendosi *composto*.

4. I numeri essendo infiniti, bisogna trovare il modo di enunciarli e di seriverli con pochissimi nomi, e con pochissimi caratteri. Questi caratteri si chiamano *cifre*.

5. Per la qual cosa il problema della numerazione ha due parti, quella cioè di sapere enunciare i numeri, e quella di saperli scrivere: e comechè la prima di queste parti, ossia la nomenclatura de' numeri, appartenga piuttosto alle prime nozioni che si danno ai fanciulli, nondimeno non istimiamo superfluo di esporla qui con la maggior brevità possibile.

6. Diciamo in primo luogo essersi generalmente adottata la numerazion decupla, cioè quella in cui i nomi e le cifre esprimono de' numeri di dieci in dieci volte maggiori. Ogni altra progressione avrebbe potuto servire ugualmente all'uso, ma si crede comunemente essersi preferita la progressione decupla, perchè gli uomini, nella fanciullezza della lor ragione, contavano su le dita delle mani, ricominciandone il periodo dopo averlo esaurito una, due, tre, quattro volte, ec. Vediamo prima la formazione de' numeri.

7. Si sono dati differenti nomi ai nove primi numeri, de' quali si compone l'ordine delle unità propriamente dette: essi si son nominati, per abbreviare, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, in vece di dire, una unità, due unità, tre unità . . . . nove unità.

Dopo il numero nove si è costituito un nuovo ordine di unità, le quali chiamansi *decine*: e parimente per brevità si è detto, dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta; in vece di dire, una decina, due decine, tre decine..... nove decine.

Siccome tra due decine consecutive, per esempio, tra cinquanta e sessanta, contengonsi nove numeri, questi si sono espressi aggiungendo al nome delle decine i nomi delle unità da uno fino a nove, dicendosi cioè cinquantuno, cinquantadue, cinquantatré . . . . . cinquantanove. Bisogna però eccettuare dalla presente regola i primi sei numeri che son compresi tra dieci e venti, poichè non si dice dicci-uno, dicci-due, dicci-tre . . . . . dicci-sci, ma l'uso vuol che si dica undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici. È chiaro che il più gran numero che si compone di decine e di unità, è novantanove.

Dopo questo numero viene la decina di decine, di cui si è fatta l'unità del terzo ordine col nome collettivo di *cento*; e le collezioni di questa unità si son dette dugento, trecento, quattrocento. . . . . novecento. Si comprenderà facilmente che aggiungendo ai nomi delle centinaia i nomi già noti delle unità e delle decine, si potranno enunciare tutti i numeri che si contengono tra le centinaia sino a novecento novantanove.

Se a questo numero si aggiunga eziandio una unità, si avrà la decina di cento col nome di *mi-*

*gliaio*. Si è detta *mille* l'unità di questo quarto ordine, e le collezioni di essa si sono espresse con dire, due mila, tre mila, quattro mila... nove mila. Sapendo già noi i nomi delle unità, delle decine e delle centinaia, potremo esprimere tutti i numeri intermediî sino a nove mila novecento novantanove.

Succede a questo numero la decina di migliaia, per la quale non si è introdotto un nuovo nome; lo che peraltro avrebbe potuto farsi alla maniera de' Greci, che la chiamavano *miriade*. La qual voce se si fosse adottata, in vece di dire, come attualmente facciamo, dieci mila, ventimila, trentamila... novantamila, avremmo potuto dire, una miriade, due miriadi, tre miriadi... nove miriadi. Se ai nomi diecimila, ventimila, trentamila... novantamila aggiungiamo i nomi delle unità, delle decine, delle centinaia e delle migliaia, sapremo profferire i numeri intermediî sino a novantanovemila novecento novantanove.

Se questo numero si accresca ancora di una unità, si avrà un numero uguale a dieci volte dieci mila, ossia a *centomila*. Senza introdurre una nuova voce, si è contentato di stabilire centomila come unità del sesto ordine; e ripetendo i nomi delle unità semplici, delle decine, delle centinaia, delle migliaia e delle decine di migliaia, si sono enunciati tutti i numeri intermediî sino a novecento novantanove mila novecento novantanove.

Con dieci centomila si è fatta l'unità del set-

timo, ordine, alla quale si è dato il nome di *milione*; e si son formati similmente i *bilioni*, i *trilioni*, i *quadrilioni*, i *quintilioni* ec.

8. Fa d' uopo di avvertire che i moderni geometri, specialmente i Francesi, considerando che un milione è uguale a mille migliaia, danno il nome di bilione alla collezione di mille milioni, di trilione alla collezione di mille bilioni, e così in seguito. Ma gli antichi riflettendo che un milione si compone di mille volte mille unità, chiamarono bilione una collezione di mille volte mille milioni, trilione una collezione di mille volte mille bilioni, e così in avanti. Avremo occasione di notar meglio qui appresso questa differenza di nomenclatura, ma da ora avvertiamo il lettore che noi riterremo l' antica.

Dopo aver fatto conoscere che con pochissimi nomi si possono esprimere i numeri, passiamo alla seconda parte del problema, cioè alla scrittura di essi.

9. Si sono rappresentati i nove primi numeri

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove,  
per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sarebbe stata facil cosa di inventare nuove cifre per segnare gli altri numeri, ma si sarebbe caduto nell' inconveniente di avere una moltitudine infinita di cifre. Gli Arabi, o forse gl' Indiani, popoli più antichi di loro, tolsero di mezzo questa difficoltà con un espediente quanto semplice altrettanto ingegnoso. Egliuo riflettendo che

ogni unità di un ordine superiore era uguale a dieci unità dell'ordine inferiore, o per dire la medesima cosa in altri termini, riflettendo, che ogni decina valea dieci unità semplici, ogni centinaio dieci decine, ogni migliaio dieci centinaia ec., si avvisarono di dare anche alla cifra un valore di dieci in dieci volte maggiore, a misura che essa si avvanzi di un posto verso la sinistra: quindi riuscì loro facile di rappresentare i numeri composti con le medesime cifre, con le quali si scrivono i numeri semplici.

Così dovendo scrivere cinquantasette, cioè cinque decine e sette unità, scrissero 57, valendo la cifra 7 sette unità, come quella che è nel primo posto a dritta, e la cifra 5 cinque decine, perchè essa si trova di un posto più avanzato verso la sinistra. Similmente dovendo scrivere trecento sessantacinque, scrissero 365; valendo la cifra 5, la quale è nel primo posto a dritta, cinque unità; la cifra 6 sei decine, essendo essa nel secondo posto a dritta, cioè di un posto più avanti verso la sinistra; e finalmente la cifra 3 tre centinaia, perchè essa occupa il terzo posto contando sempre dalla dritta.

10. Volendo riunire di una maniera più breve e più generale quanto sparsamente si è detto sulla enunciazione e scrittura de' numeri, serviamoci di un numero molto grande, per esempio, del seguente, il quale contiene 23 cifre. Separiamole da dritta a sinistra, per mezzo delle virgole, in caselle, ognuna composta di tre cifre, eccetto l'ultima a sinistra che ne avrà due,

e che in altri casi potrebbe averne anche una sola; e su la prima cifra di ciascun ternario che è in luogo dispari, a cominciar però dal terzo, poniamo successivamente gl'indici 1, 2, 3, avremo il seguente quadro:

$\begin{matrix} 3 & & 2 & & 1 \\ 25, & 589, & 765, & 584, & 726, & 289, & 457, & 586. \end{matrix}$

È facile a comprendere, dopo le nozioni diggià esposte, che il primo ternario a destra denota semplicemente unità, decine e centinaia; il secondo unità, decine e centinaia di migliaia; il terzo, unità, decine e centinaia di milioni; il quarto, unità, decine e centinaia di migliaia di milioni; il quinto, unità, decine e centinaia di bilioni; il sesto, unità, decine e centinaia di migliaia di bilioni; il settimo, unità, decine e centinaia di trilioni; l'ottavo finalmente indica unità e decine di migliaia di trilioni. Per lo che leggendo ogni ternario, come se fosse solo, a cominciar però dalla sinistra, e aggiungendo la voce mila dove si scontra solamente la virgola senza alcun indice; la voce trilione, dove è sovrapposto 3; la voce bilione, dove è sovrapposto 2; e la voce milione, dove è sovrapposto 1, il dianzi scritto numero si enunzierà: ventitremila cinquecento ottantanove *trilioni*, settecento sessantacinquemila trecento ottantaquattro *bilioni*, settecento ventiseimila dugento ottantanove *milioni*, quattrocento trenta-settemila, cinquecento ottantasci.

15. Volendo attenersi alla moderna nomenclatura, il primo ternario a destra indicherà unità, decine e centinaia semplici; il secondo, unità,

decine e centinaia di mille; il terzo, unità, decine e centinaia di milioni; il quarto, unità, decine e centinaia di bilioni; il quinto, unità, decine e centinaia di trilioni; il sesto, unità, decine e centinaia di quadrilioni; il settimo, unità, decine e centinaia di quintilioni; e finalmente l'ottavo indicherà unità e decine di sestilioni. Onde, suppressi gl'indici, il numero

23, 589, 765, 584, 726, 289, 437, 589

si profferirà : ventitrè sestilioni, cinquecento ottantanove quintilioni, settecento sessantacinque quadrilioni, trecento ottantaquattro trilioni, settecento ventisei bilioni, dugento ottantanove milioni, quattrocento trentasette mila, cinquecento ottantanove unità ( la voce unità, per abbreviare, potendosi anche omettere ).

12. Potendo avvenire che in un numero manchino le unità di qualche ordine, si è dagli aritmetici inventato il seguente carattere (0) che chiamasi zero; il quale non ha in se alcun valore, ma serve a supplire la mancanza di quelle unità. Per esempio, volendosi scrivere tremila, nel qual numero mancano le unità, le decine e le centinaia, tutte queste mancanze si suppliranno con tre zeri a dritta, e si farà occupare alla cifra 3 il quarto posto, come qui segue : 3000.

Similmente dovendosi scrivere due milioni cinquecento mila trecento sessanta, si scriverà uno zero a dritta per supplire la mancanza delle unità, indi si scriverà 6 verso la sinistra per le decine,

e poi 3 per le centinaia; in seguito si porranno due zeri per la mancanza delle migliaia, e delle decine di migliaia; finalmente si scriverà 5 per le centinaia di migliaia, ed in seguito 2 pei milioni. Sicchè l'anzidetto numero si scriverà come qui sotto si vede:

2, 500, 360.

Dopo tuttociò che si è detto, non s'incontrerà più difficoltà a scrivere ed enunciare un numero qualsivoglia. Soggiungiamo alcune altre distinzioni a farsi su i numeri, per meglio conoscere la lor natura.

13. Qualora l'unità indica una specie particolare, come *un* cavallo, *una* canna, la unione di più di queste unità dicesi numero *concreto*: così *cento* cavalli, *trenta* canne sono numeri concreti. Ma se l'unità non è determinata, e vien semplicemente indicata per *uno* o per *una volta*, il numero formato da queste unità chiamasi *astratto*. Per esempio, *dieci*, *ventiquattro*, oppure, *dieci volte*, *ventiquattro volte*, sono numeri astratti.

14. Generalmente si dicono numeri omogenei quelli che si rapportano ad unità del medesimo genere, come sarebbero *trenta* canne, e *quarantacinque* canne: ed eterogenei, quelli che si rapportano ad unità di genere diverso, come sarebbero *cinque* canne e *nove* rotoli.

15. Ma i numeri alle volte possono riferirsi ad unità del medesimo genere, e della medesima

grandezza, come sono nell' addotto esempio trenta canne, e quarantacinque canne; ed alle volte ad unità del medesimo genere, ma di differente grandezza, come sarebbero sette canne, e cinque palmi: per la qual cosa dei numeri omogenei altri sono *complessi*, altri *incomplessi*. Si dicono *incomplessi*, quando si rapportano ad unità del medesimo genere, e della medesima grandezza; e *complessi*, quando si riferiscono ad unità del genere medesimo, ma di grandezza differente.

Premesse queste conoscenze sul sistema della numerazione, e su la natura dei numeri, passiamo alle principali operazioni dell' aritmetica, intendendo di eseguirle prima su i numeri *incomplessi*.

### *Dell' addizione.*

16. La prima questione che si affacciò allo spirito dell' uomo, fu di sapere a qual numero erano uguali più numeri esprimenti oggetti simili; di sapere, per esempio, quanti alberi faceano cinque alberi, più sei alberi, più nove alberi. L' operazione per la quale dati più numeri omogenei, se ne cerca un altro che sia uguale a tutti i numeri dati presi insieme, dicesi *addizione*; e il numero cercato *somma* ovvero *aggregato*.

Non si può dare alcuna regola per aggiungere insieme i numeri semplici; fa mestieri che per l' uso si sappiano già sommare. Ma volendo sommare i numeri composti, quali sarebbero 4625, 8336 e 2764, è chiaro, che la somma si otterrà

unendo separatamente le migliaia, le centinaia, le decine e le unità de' numeri proposti; la qual somma sarà 14 migliaia, più 16 centinaia, più 11 decine, più 13 unità. Operando di nuovo su questi ultimi numeri, avremo 1 decina di migliaia, più 5 migliaia, più 7 centinaia, più 2 decine, più 3 unità, ossia 15725 per la somma cercata. Ma si riconobbe ben presto potersi pervenire al medesimo risultamento per una via più facile, incominciando cioè dalla somma delle unità per indi progredire a quella delle decine, delle centinaia, ec., acciocchè, risultando dalla unione delle unità di un ordine una o più unità dell'ordine superiore, queste con quelle del medesimo ordine si potessero riunire. A qual uopo, scritti i numeri proposti in modo l'uno sotto dell'altro, che le unità corrispondano con le unità, le decine con le decine, le centinaia con le centinaia ec., e tirata una linea orizzontale, per separare dalla somma i numeri proposti, come qui sotto fatto si vede:

$$\begin{array}{r}
 4625 \\
 8356 \\
 2764 \\
 \hline
 \text{Somma } 15723
 \end{array}$$

cominceremo a dir dalla dritta, 5 unità e 6 unità fanno 9 unità, e 4 unità fanno 13 unità, cioè 1 decina e 3 unità; scriveremo 3 sotto la linea al posto delle unità, ed una decina sarà da noi ritenuta per unirila alle decine che seguono: Operando su queste, diremo ancora, 1 decina ri-

tenuta e 2 fanno 3, e 3 fanno 6, e 6 fanno 12; noteremo 2 sotto la colonna delle decine, e dieci decine ossia 1 centinaio sarà da noi serbato per aggiungerlo alle centinaia che vengono dopo. Per le quali eziandio diremo, 1 centinaio riserbato e 6 fanno 7, e 3 fanno 10, e 7 fanno 17, cioè un migliaio e sette centinaia; quindi ritenendo 1 migliaio per aggiungerlo alle migliaia seguenti, scriveremo soltanto 7 sotto la linea al posto delle centinaia. Finalmente la somma delle migliaia essendo 14, ed 1 migliaio che si porta dalla unione delle centinaia precedenti facendo 15, scriveremo 5 sotto la colonna delle migliaia; e la decina di migliaia non dovendosi unire ad altri numeri, per essere già terminata l'operazione, in seguito di 5 porremo 1. La richiesta somma sarà, come qui innanzi si è trovata, 15723.

Nella pratica si suole abbreviare con dire: 3 e 6 fanno 9, e 4 fanno 13, si scriva 3, e si riporti 1; 1 e 2 fanno 3, e 3 fanno 6, e 6 fanno 12, si scriva 2, e si riporti 1; e così in seguito.

17. Ragionando per ogni altro caso, come per questo, si può generalmente conchiudere che per fare l'addizione, bisogna scrivere i numeri proposti in colonne verticali, in modo che le unità del medesimo ordine si corrispondano, cioè che le unità stieno sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia ec., e tirata sotto questi numeri una linea orizzontale, si aggiungano insieme le unità, e la somma si scriva sotto la linea, purchè esse non compongono delle decine, ossia non oltrepassino 9: altrimenti no-

tinsi al posto delle unità le sole unità che rimangono, e la decina o le decine che dalla unione delle unità han potuto formarsi, si ritengano col pensiero per aggiungerle alle decine della colonna seguente. Si operi della stessa maniera su le decine, le centinaia, le migliaia ec. de' numeri proposti, sino alle unità della più alta specie, delle quali si scriverà la somma tal quale si è trovata.

Ecco alcuni esempj di addizione, su i quali i principianti si potranno esercitare.

|               |                |               |
|---------------|----------------|---------------|
| 837043        | 4057527        | 738900        |
| 589324        | 9832049        | 588703        |
| 78392         | 673527         | 87909         |
| 7862          | 6438           | 3807          |
| <hr/> 1512621 | <hr/> 14569341 | <hr/> 1419319 |

### *Della sottrazione.*

18. La seconda questione che l' uomo fece a se medesimo, fu di sapere di due quantità date quanto si dovette aggiungere alla quantità minore per ottenere la maggiore; lo che ei rinvenne togliendo dalla maggiore la minor quantità data. L' operazione per la quale dati due numeri disuguali, se ne cerca un altro che sia uguale all' eccesso del numero maggiore sul minore, dicesi *sottrazione*; e' l' numero cercato *resto*, *residuo*, o *differenza*.

Non altrimenti che nell' addizione noteremo qui di non dover dare alcuna regola per la sot-

trazione de' numeri semplici , ponendo , che per l' uso si sappiano già sottrarre. Ma se da 8976 si vuol sottrarre 3524 , è chiaro , che si otterrà il residuo togliendo rispettivamente dalle migliaia , centinaia , decine ed unità del primo numero , le migliaia , centinaia , decine ed unità del secondo ; cioè togliendo dalle cifre 8 , 9 , 7 e 6 del numero 8976 le corrispondenti cifre 3 , 5 , 2 e 4 del numero 3524 : e l' richiesto residuo sarà 5452. Saremmo pervenuti al medesimo risultamento , incominciando la sottrazione dalla dritta ; poichè togliendo dalle unità , decine , centinaia e migliaia del primo numero le unità , decine , centinaia e migliaia del secondo , cioè sottraendo rispettivamente dalle cifre 6 , 7 , 9 e 8 del numero 8976 le cifre 4 , 2 , 5 e 3 del numero 3524 , avremmo ottenuto il medesimo residuo 5452.

Ciò avrà luogo ogni volta che ciascuna cifra del numero che debbe sottrarsi , è minore di ciascuna cifra di quello da cui si debbe sottrarre. Perciocchè ; se dal numero 8764 si voglia sottrarre l' altro 5283 , togliendo da 8 migliaia 5 migliaia avremo 3 migliaia di resto ; e similmente da 7 centinaia togliendo 2 centinaia otterremo per resto 5 centinaia ; ma da 6 decine non potremo sottrarre 8 decine , per essere queste più di quelle. In questo caso bisogna concepire col pensiero la cifra 7 decomposta in 6 più 1 , cioè in 6 centinaia più 1 centinaio ; il qual centinaio risoluto in 10 decine , aggiungasi alle 6 decine che già abbiamo , allora il numero 8764 si troverà de-

composto in 8 migliaia, più 6 centinaia, più 16 decine e più 4 unità, onde converrà sottrarre le cifre 5, 2, 8 e 3 del numero 5283 da 8, 6, 16 e 4; ed i resti parziali, scritti da sinistra a destra un dopo l'altro, daranno per resto totale 3481.

Che però va meglio fatto di cominciare la sottrazione dalle unità per indi progredire alle decine, alle centinaia ec., acciocchè, se mai qualche cifra del numero minore non si possa togliere dalla corrispondente cifra del numero maggiore, si prenda in questo nella cifra che succede verso la sinistra una unità, la quale equivalerà a dieci unità della cifra che prende ad imprestito, e con ciò la sottrazione si renderà possibile; nel continuar la quale bisogna concepire la cifra che ha dato ad imprestito come diminuita di una unità.

Serviamoci di un esempio per meglio fissare la presente regola; vogliasi sottrarre dal numero 845692 l'altro 538927. Scriviamo i numeri proposti uno sotto dell'altro, in modo che le unità del medesimo ordine sieno nella medesima vertical colonna, cioè le unità sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia ec.; e tiriamo una linea orizzontale per separare dal residuo i numeri proposti.

$$\begin{array}{r} 845692 \\ 538927 \\ \hline 304765, \end{array}$$

Si vede a primo tratto che da 2 unità non si possono togliere 7 unità, prendiamo dunque ad

prestito dalla superior cifra 9 una unità, che vale una decina ossia 10 unità; le quali se col pensiero aggiungansi alle 2 unità, avremo un numero composto di 12 unità da cui si può sottrarre la cifra 7: si otterrà per resto 5 che scriveremo sotto la linea al posto delle unità. Passando alla colonna delle decine ci rammenteremo di aver preso ad prestito 1 dalla cifra superiore 9, onde questa non vale più che 8, cioè 8 decine, da cui tolta la inferior cifra 2 significante anche essa decine, avremo per resto 6 che scriveremo sotto la linea al posto delle decine. Operando su la colonna delle centinaia si scorge non potersi dalla cifra 6 sottrarre la cifra 9, per la qual cosa prenderemo ad prestito dalla cifra 3 che è dopo il 6 una unità, la quale vale un migliaio, ossia 10 centinaia: queste riunite col pensiero alle 6 centinaia daranno un totale di 16 centinaia, da cui si potrà togliere la cifra 9, ed il resto essendo 7, lo scriveremo sotto la colonna delle centinaia. La cifra superiore 3 essendo rimasta 2, e non potendosi da 2 migliaia togliere la sottoposta cifra 8 esprimente essa pure migliaia, ricorreremo alla cifra superior 4, dopo il 3, la cui unità vale 10 migliaia, le quali unite alle 2 migliaia faranno 12 migliaia, da cui si può levare la cifra 8: il resto sarà 4, che noteremo sotto la linea al posto delle migliaia. La cifra superior 4 essendosi diminuita di 1, non valerà più che 3 decine di migliaia, da cui sottratta la cifra inferior 3 esprimente anche essa decine di migliaia, il resto per questa colonna

sarà zero : dunque noteremo 0 sotto la linea al posto delle decine di migliaia. Finalmente togliendo dall' ultima cifra superiore 8 la cifra 5 che le corrisponde nel numero inferiore , il resto sarà 3 che scriveremo in ultimo posto sotto la linea , e sarà con ciò terminata la sottrazione : siechè il richiesto residuo è 304765.

Nella pratica si suole abbreviare, dicendo: da 12 tolto 7 , resta 5; da 8 tolto 2 , resta 6; da 16 tolto 9 , resta 7; da 12 tolto 8 , resta 4; da 3 tolto 3 , resta 0; da 8 tolto 5 , resta 3.

19. Evvi un caso nella sottrazione il quale merita di essere analizzato, poichè potrebbe imbarazzare i principianti, ed è quando la cifra che dee prendere ad prestito è seguita a sinistra da uno o da più zeri. Incominciamo dal caso in cui la cifra è seguita da un solo zero, e, per meglio fissare le nostre idee, fingiamo che da 803 si voglia sottrarre 578 : il prestito non si farà sullo zero, ma su la cifra significativa 8 le cui unità valgono centinaia, e come non si può aver bisogno di più di una decina, così risolveremo il centinaio in 9 decine più 1 decina, tal che il numero 803 sarà decomposto in 700, più 90, più 10 e più 3, ossia 7 centinaia, più 9 decine e più 13 unità. Or da 13 si potrà sottrarre 8, e si avrà per resto 5 unità; indi lo 0 delle decine si conterà per 9 decine, dalle quali se ne toglieranno 7, e se ne otterranno 2; finalmente sottraendo 5 centinaia da 7 centinaia, e non già da 8, essendone prestato uno, restaranno 2 centinaia; onde il total residuo sarà 225;

Se la cifra fosse seguita da più zeri, ci condurremmo di una maniera analoga alla precedente. Vogliasi, per esempio, da 70004 sottrarre 36527 : il prestito dovrà cadere sull' ultima cifra significativa 7, e come questa esprime delle decine di migliaia, e non si ha bisogno che di una decina, scioglieremo la decina di migliaia in 9990 più 10; di modochè il numero 70004 sarà decomposto in 69990, più 10, e più 4, ovvero in 6 decine di migliaia, 9 migliaia, 9 centinaia, 9 decine e 14 unità, ciò che è onninamente la medesima cosa che 70004. Quindi avremo successivamente a togliere le cifre 7, 2, 5, 6 e 3 del numero 36527 dalle corrispondenti cifre 14, 9, 9, 9 e 6 del numero 70004, decomposto come si è veduto; onde operando come sopra si è insegnato, avremo per resti parziali 7, 7, 4, 3 e 5, cioè 53477.

20. Da tutto ciò che si è detto su i diversi casi che presenta la sottrazione, si può stabilire la seguente regola generale.

Si scriva il minore de' due numeri proposti sotto il maggiore, in maniera che le unità corrispondano con le unità, le decine con le decine, le centinaia con le centinaia, ec.; ed avendo tirata una linea orizzontale sotto di essi per separarli dal residuo, incominciando dalla dritta, si tolgano le cifre inferiori dalle cifre superiori del medesimo ordine, e notinsi sotto la linea i resti parziali a misura che si ottengano. Se qualche cifra inferiore è più grande della superiore, si prenda ad imprestito col pensiero dalla cifra vicina 1 unità, che vale 10 per la cifra su la

quale si opera; aggiungansi queste 10 unità ad essa cifra, e la sottrazione si renderà possibile; indi nella sottrazione parziale che siegue, dovendo aver conto dell'unità prestata, fa mestieri che quella cifra sia diminuita di una unità. Finalmente se la cifra che dee prendere ad prestito è seguita da uno o da più zeri a sinistra, il prestito si farà su la prima cifra significativa, ma nelle seguenti parziali sottrazioni bisogna contare questa cifra diminuita di una unità, e i zeri per 9.

Ecco alcuni esempi di sottrazione per esercizio de' giovani.

|               |                |                 |
|---------------|----------------|-----------------|
| 830045        | 5400007        | 29743005        |
| <u>723732</u> | <u>3273465</u> | <u>26389770</u> |
| 106313        | 2126542        | 3353235.        |

21. Se molti numeri debbansi sottrarre da molti altri, pare, dopo ciò che si è detto ne' precedenti capitoli, che bisogni fare due addizioni ed una sottrazione; nulladimeno si possono semplificare queste operazioni coll'aiuto de' *complementi aritmetici*. Intendesi per *complemento aritmetico* il resto di un numero sottratto dall'unità, seguita da tanti zeri quante sono le cifre di esso numero. Per esempio, togliendo 37 da 100, il resto 63 si dirà complemento aritmetico di 37: similmente togliendo 327 da 1000, il resto 673 sarà il complemento aritmetico di 327. Si vede chiaramente che per avere il complemento aritmetico di un numero, conviene sottrarre le unità di esso da 10, e le altre cifre da 9; il qual calcolo è

così facile , che merita appena di essere stimata un'operazione. Intanto il complemento aritmetico riduce la sottrazione ad addizione , lo che può essere utile in molti casi, specialmente in quello che stiamo esaminando.

Per intendere di ciò la ragione , supponiamo volersi sottrarre 17 da 54; facendo la sottrazione alla solita maniera avremo per resto 37. Ma volendoci servire del complemento aritmetico, quello di 17 è 83, il quale aggiunto a 54 darà per somma 137. Poichè dovevamo togliere 17 da 54, ed in vece vi abbiamo aggiunto 83, si è operata in effetti la richiesta sottrazione , ma nella somma vi è l'aumento di 1 centinaio: onde sottraendolo dalla somma 137, ossia togliendo una unità dalla prima cifra a sinistra della somma, la qual cifra, nel presente caso , è anche 1, si otterrà per resto 37 , come noi avevamo diggià trovato. Questo ragionamento potendosi adattare agli altri casi, si vede che per sottrarre un numero da un altro, o molti numeri da molti altri, bisogna prendere de' numeri a sottrarsi i complementi aritmetici, indi aggiugnerli a que' numeri dai quali si vuol far la sottrazione , e finalmente togliere tante volte l'unità dalla prima cifra della somma quanti sono i numeri che si vogliono sottrarre.

Per maggior chiarezza , e per vederne l'operazione figurata , proponiamoci di sottrarre dai tre seguenti numeri :

|               |              |
|---------------|--------------|
| 4824          | 3736         |
| 5632          | 4588         |
| 8796          | 7347         |
| <u>19252</u>  | <u>15671</u> |
| 15671         |              |
| Resto... 3581 |              |

In vece di aggiungere insieme i primi tre numeri per aver la somma 19252, indi di aggiungere insieme i tre ultimi numeri per aver la somma 15671, e finalmente di sottrarre questa seconda somma dalla prima per avere il resto 3581; prendiamo dei numeri 3736, 4588 e 7347 i complementi aritmetici che sono rispettivamente 6264, 5412 e 2653, e scriviamoli sotto i primi tre numeri, come qui appresso fatto si vede, ed aggiungiamo insieme i sei numeri:

|                   |                   |                |
|-------------------|-------------------|----------------|
|                   | 4824              |                |
|                   | 5632              |                |
|                   | 8796              |                |
|                   | 6264              |                |
| complementi arit. | 5412              |                |
|                   | 2653              |                |
|                   | <u>          </u> |                |
| Somma...          | 3581              | Resto... 3581. |

Si osserva che fatta la somma, bisogna solamente supprimere 5 unità nella prima cifra a sinistra, ovvero, nel presente caso, cancellare la prima cifra della somma per avere il residuo addimandato

22. Abbiám detto doversi supprimere tante volte,

L'unità dalla prima cifra della somma quanti sono i numeri a sottrarsi, perchè abbiám supposto sì questi come quelli dai quali si dee fare la sottrazione, avere il medesimo numero di cifre; lo che non essendo, non si farà la suppressione delle unità su la prima cifra della somma, ma bensì su quella cifra che è del medesimo ordine dell'unità seguita da' zeri, dalla quale si sono ottenuti i complementi aritmetici. Così volendo sottrarre i due numeri 523, e 438 dagli altri due 3472, e 8936, si prendano de' due numeri 523, e 438 i complementi aritmetici che sono 477, e 562; uniamoli coi due numeri 3472 e 8936, avremo per somma totale 13447: e siccome i suddetti complementi aritmetici si sono ottenuti da 1000, dobbiamo supprimere 2 unità su la cifra della somma che denota delle migliaia, cioè su la cifra 3, tal che il residuo addimandato sarà 11447.

23. Oltre a ciò, i numeri che si debbono sottrarre potrebbero non avere il medesimo numero di cifre, allora, ottenuta la somma, si andrà successivamente supprimendo l'unità su ciascuna cifra che è del medesimo ordine dell'unità seguita dai zeri, dalla quale si è ottenuto ciascun complemento aritmetico. Vogliansi, per esempio, sottrarre dai tre seguenti numeri:

|                   |              |                |
|-------------------|--------------|----------------|
| 44586             |              | 5628           |
| 73892             | i tre numeri | 437            |
| 56337             |              | 58             |
| Somma.... 174815  |              | Somma.... 4123 |
| 4123              |              |                |
| Resto..... 170692 |              |                |

La somma de' primi tre numeri essendo 174815, e quella dei secondi 4125, togliamo dalla prima la seconda somma, avremo per resto 170692.

Prendiamo i complementi aritmetici dei numeri 3628, 437 e 58; i quali complementi essendo 6372, 563 e 42, scriviamoli sotto i tre numeri 44586, 73892 e 56337, come qui appresso fatto si vede.

|              |        |                 |
|--------------|--------|-----------------|
|              | 44586  |                 |
|              | 73892  |                 |
|              | 56337  |                 |
|              | 6372   |                 |
| compl. arit. | 563    |                 |
|              | 42     |                 |
|              | -----  |                 |
| Somma....    | 181792 | Resto... 170692 |

Aggiunti insieme questi sei numeri, risulta per somma totale 181792, dalla quale bisogna sopprimere una unità per ciascun numero che si è sottratto; e siccome per avere il complemento aritmetico del primo numero a sottrarsi 3628, si è tolto questo numero da 10000, così converrà sopprimere una unità su la cifra della somma che indica decine di migliaia, cioè su la cifra 8 la quale diverrà 7: similmente pel numero 437 il cui complemento aritmetico si è ottenuto togliendo esso numero da 1000, si dee sopprimere una unità nella somma su la cifra che dinota migliaia, onde la cifra 1 si farà 0; e finalmente pel numero 58 il cui complemento aritmetico si è preso da 100, si sopprimerà anche una unità dalla

cifra della somma che denota centinaia , quindi la cifra 7 diventerà 6 , in maniera che il residuo sarà 170692 , che avevamo già trovato.

24. Nondimeno si può evitare questa molteplicità di casi dando una maggior latitudine al complemento aritmetico, intendendo cioè per esso il resto di un numero tolto dall'unità seguita *almeno* da tanti zeri, quante sono le cifre di esso numero. Imperocchè in tal modo noi prenderemo i complementi aritmetici dei numeri a sottrarsi togliendoli dall'unità seguita da tanti zeri, quante sono le cifre del numero che ne contiene il più, o questo numero sia tra quelli a sottrarsi, o tra quelli dai quali si dee fare la sottrazione; e con ciò la suppressione delle unità cadrà sempre sulla prima cifra della somma. Riprendiamo l'esempio, che ci avevamo proposto nell'articolo precedente. Siccome nelle due serie de' numeri la più alta specie contiene decine di migliaia , togliamo successivamente i numeri a sottrarsi 5628, 457 e 58 da 100000; i resti 96372, 99563 e 99942 saranno i loro complementi aritmetici. Essi si scrivano sotto i numeri dai quali si debba fare la sottrazione, 44586, 7389a e 56337, e si aggiungano tutti i sei numeri insieme, come qui sotto si può vedere :

( 25 )

$$\begin{array}{r} 44586 \\ 75892 \\ 56537 \\ \text{complementi aritmetici} \left\{ \begin{array}{l} 96372 \\ 99563 \\ 99942 \end{array} \right. \\ \hline \text{Somma} \dots 470692 \quad \text{Resto} \dots 170692 \end{array}$$

Si avrà per somma totale 470692, nella quale conviene suppressere 5 unità dalla prima cifra 4; onde il resto sarà 170692, che in altra guisa noi avevamo già ottenuto.

*Delle pruove dell' addizione e della sottrazione*

25. Quantunque l' addizione e la sottrazione siano due facili operazioni di calcolo, pure alle volte si possono commettere degli errori; onde per convincersi che si è bene operato si suole ricorrere alla *pruova*, la quale è una nuova operazione che si fa per assicurarsi che la prima è esatta.

L' addizione si prova per mezzo della sottrazione, e reciprocamente; e vedremo in seguito che in generale ogni regola si prova per mezzo della regola contraria.

Per verificare che una somma sia ben fatta si suole distaccare una serie de' numeri proposti per mezzo di una linea, indi aggiungere insieme le serie rimanenti, e finalmente sottrarre dalla prima somma la seconda; e si conchiude che non si è commesso errore, se il resto trovasi uguale alla serie che si è tolta.

Comcehè questa maniera di provare la somma poggia sopra un principio certo , cioè che se da un tutto tolgansi alcune delle sue parti , il resto esser debbe uguale alla parte rimanente ; purtuttavia , nel fare le due somme , potendosi commettere il medesimo errore nella medesima colonna , ancorchè la somma sia erronea , il resto si troverebbe uguale alla serie tolta.

Diamo un esempio per far meglio sentire la poca sicurezza di questa regola.

$$\begin{array}{r}
 83754 \\
 \hline
 73271 \\
 98737 \\
 \hline
 50978 \\
 306750 \\
 \hline
 222996 \\
 \hline
 -83754
 \end{array}$$

Nel fare la prima somma si è commesso un errore nella colonna delle decine , cioè si è posta una decina di più , e si è commesso un simile errore nell' eseguire la seconda somma ; nondimeno si trova il resto 83754 uguale alla prima serie tolta. Se l'errore fosse stato in difetto , sarebbe risultato il medesimo sconeio.

Nè giova , come taluni praticano , di comprovare la somma con rifare il calcolo da giù in su ; poichè il medesimo inconveniente potrebbe aver luogo.

Soggiungiamo una terza regola la quale si suole praticare dagli analisti Francesi , e che nemmeno

è esente dall' inconveniente da noi notato ; e per meglio fissarne l'idea , proponiamoci di verificare la somma de' seguenti numeri :

$$\begin{array}{r}
 4989 \\
 5783 \\
 7947 \\
 \underline{9456} \\
 \text{Somma} \dots 28175.
 \end{array}$$

Facciamo di nuovo l' addizione , incominciando dalla prima colonna a sinistra ; la somma di questa colonna è 25 cioè 25 migliaia , e siccome nella somma si è scritto 28 mila , i tre mila di più debbono venire dal serbo fatto su la colonna precedente. Queste 3 migliaia ossia 30 centinaia, ed un centinaio che rinviensi nella somma , sono 31 centinaia ; ma la colonna delle centinaia non dà realmente per la somma che 29 : dunque le 2 centinaia di più debbono derivare dalla colonna delle decine. Se l' eccesso 2 uniscasi alla cifra vicina 7 , si troverà scritto nella somma 27 decine ; ma la somma delle decine non è che 25 , onde 2 decine dipendono da ciò che si è ritenuto sulle unità , la somma delle quali ha dovuto essere per conseguenza 25. Finalmente la somma delle unità essendo effettivamente 25 , si conchiuderà esser esatta la somma che ci avevamo proposto di verificare.

Volendo con questo medesimo metodo verificare la somma del primo esempio di questo articolo , nella quale ci ricorderemo essere una

decina di più , se in un momento di distrazione crediamo la somma delle decine essere 25 , in vece di 22 , resterà 20 nella colonna delle unità , quanto dà precisamente la somma di questa colonna ; quindi potremmo inferire la somma in quistione esser esatta , lo che non è.

Sicchè ciascuna delle tre maniere di provare la giustezza di un'addizione è soggetta al medesimo inconveniente ; ma come egli è difficile che nel fare due volte la somma si commetta il medesimo errore nella medesima colonna , così in molti casi possiamo valerci di una delle tre regole date : e perchè l' ultima regola da noi stabilita suole preferirsi alle due altre , convien però enunciarla in un modo astratto e generale. Eccola.

Si faccia di nuovo la somma incominciando dalla colonna che è prima a sinistra , ed ogni somma parziale si sottragga dalla parte che le corrisponde nella somma totale ; e ciò si continui sino alle unità semplici , la somma delle quali esser dee tale , che togliendola dalla parte della somma totale , il resto sia zero.

26. Allorchè si fa una sottrazione , il numero che risulta , il quale si è da noi chiamato *resto* , *residuo* , o *differenza* , indica quanto il numero maggiore da cui si fa la sottrazione eccede il minore ; onde per assicurarsi che una sottrazione è ben fatta , conviene aggiungere il resto col numero che si sottrae , e trovare la somma uguale al numero da cui si sottrae , ossia al maggiore de' due numeri dati : un tal procedere si dice pruova della sottrazione.

Così nell'esempio che siegue, dedurremo la sottrazione esser fatta a dovere, perchè aggiungendo il resto 20539 con 36785 risulta la somma uguale a 57324, che è il numero da cui si è sottratto il precedente.

$$\begin{array}{r}
 57324 \\
 \underline{36785} \\
 20539 \\
 \underline{36785} \\
 57324
 \end{array}$$

### *Della moltiplicazione.*

27. Se un numero si aggiunga ad esso medesimo una volta, ciò che risulta sarà il *doppio* di esso numero; se aggiungasi due volte di seguito, ciò che risulta sarà il *triplo*; se aggiungasi tre volte, risulterà il *quadruplo*; ed in generale aggiungendo più volte e successivamente un numero ad esso medesimo, quel che risulta si dirà il *multiplo* di esso numero.

Sicchè per raddoppiare un numero, converrà fare la somma di due numeri, ciascuno uguale a quello che si vuol raddoppiare; per triplicarlo, bisognerà fare la somma di tre numeri, ciascuno uguale a quello che si vuol triplicare; per quadruplicarlo, converrà sommare quattro numeri ciascuno uguale a quello che si vuol quadruplicare; ed in generale, per moltiplicare un numero bisognerà sommare tanti numeri, ognuno uguale a quello che si vuol moltiplicare, quante sono le volte che si vuol moltiplicare.

Così con le tre seguenti somme otterremo il doppio, il triplo e'l quadruplo di 37.

|                |                 |                    |
|----------------|-----------------|--------------------|
| 37             | 37              | 37                 |
| 37             | 37              | 37                 |
| —              | 37              | 37                 |
| Pel doppio 74. | —               | 37                 |
|                | Pel triplo 111. | —                  |
|                |                 | Pel quadruplo 148. |

Ma se il numero fosse molto grande, e si volesse ripetere un gran numero di volte, sarebbe troppo lungo e laborioso di cercare il multiplo per mezzo dell'addizione; epperò si è stabilita un'operazione molto più abbreviata, che dicesi propriamente *moltiplicazione*.

Adunque la moltiplicazione è una somma abbreviata: è un'operazione, per la quale si rinviene un numero uguale ad uno di due numeri dati ripetuto tante volte, quante sono le unità dell'altro. Il numero che si dee ripetere, dicesi *moltiplicando*; quello che indica quante volte si dee ripetere, chiamasi *moltiplicatore*; e ciò che risulta, *prodotto*. Il moltiplicando ed il moltiplicatore, con un nome comune, si chiamano ancora *fattori* del prodotto.

28. Vedremo qui appresso che moltiplicare un numero qualsivoglia per un altro, si riduce a fare una serie de'prodotti parziali de'numeri semplici moltiplicati a due a due; onde è necessario che tali prodotti siano come scolpiti nella memoria, e perciò giova di trovarli raccolti nella seguente tavola la cui invenzione si attribuisce a Pitagora.

TAVOLA PITAGORICA.

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 2 | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8  | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

La formazione di questa tavola è semplicissima: nella prima linea, sia orizzontale, sia verticale, si trovano scritti i numeri secondo l'ordine naturale da 1 fino a 9; e siccome per formare ciascuna di queste linee si è aggiunto continuamente 1 ad esso stesso, così per formare la seconda di qualsivoglia delle due linee conviene aggiungere continuamente 2 ad esso stesso; per la terza converrà aggiungere 3; 4 per la quarta; 5 per la quinta, ec-

29. Per rinvenire con la presente tavola il prodotto di due numeri, per esempio, di 8 per 5, si prenderà uno de' due fattori, poniamo 8, nella prima delle due linee che si vorrà, poniamo

mo nella prima linea orizzontale ; e partendo da 8 si scorra giù verticalmente , fino a che si giunga alla casella che è dirimpetto al 5 scritto nella prima linea verticale ; e come questa casella racchiude 40 , si dirà 40 essere il prodotto di 8 per 5. Se vuolsi prendere 8 nella prima linea verticale, converrà, a partir da essa, scorrere a dritta orizzontalmente fino a che si giunga alla casella che sta sotto al 5 della prima linea orizzontale, la qual casella racchiude ancor 40. Se si fosse scelto il fattore 5, e si fosse praticato con esso come si è fatto con 8, si sarebbe ottenuto eziandio il prodotto 40: ciò che potrebbe altresì servire a provare che il prodotto di 8 per 5 è lo stesso che quello di 5 per 8, ed in generale, che il prodotto di due numeri è il medesimo qualunque sia l'ordine col quale vengano moltiplicati.

Nondimeno i matematici Francesi sogliono dimostrare questa verità, per altro intuitiva, nel seguente modo: vogliasi provare che il prodotto di 8 per 5 sia lo stesso che quello di 5 per 8. Volendosi moltiplicare 8 per 5, si vede che bisogna ripetere 8 cinque volte, ossia 5 volte la collezione di 8 unità: scriviamo separatamente queste 8 unità, una dopo l'altra, in una medesima linea orizzontale, e ripetiamo 5 volte questa medesima linea, come qui appresso si può veder:

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

La somma di tutte queste unità la quale fa 40, è evidentemente il prodotto di 8 per 5, poichè ogni unità di 8 si trova ripetuta 5 volte. Ma noi possiamo dare al quadro anzi scritto un'altra disposizione, cioè segnarlo in modo che vi sieno 8 linee orizzontali, ciascuna di 5 unità: eccolo qui espresso.

1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1.

Sotto questo aspetto la somma è ancor 40; ma siccome ogni unità del 5 si trova ripetuta 8 volte, essa indicherà il prodotto di 5 per 8: sicchè il prodotto di 8 per 5 uguaglia quello di 5 per 8. La dimostrazione essendo la stessa per due numeri qualsivogliano, possiamo generalmente concludere, che il prodotto di due numeri non varia qualunque sia l'ordine col quale vengano moltiplicati.

30. Vediamo prima come si fa la moltiplicazione di un numero composto per un numero

semplice, e perciò cerchiamo di sapere il prodotto di 348 per 6. Si può considerare 348 come 3 centinaia, 4 decine e 8 unità, ed è chiaro che per avere 6 volte il numero totale, si può ripetere 6 volte ciascuna delle parti di cui esso è composto. Ad ottener ciò possiamo incominciare dalla dritta ugualmente che dalla sinistra; ma volendo procedere dalla sinistra, riesce penoso, specialmente quando il numero che si vuol moltiplicare è composto di molte cifre, come altre volte nell'addizione abbiám notato; e ciò facilmente si concepisce, se vogliamo rammentarci che la moltiplicazione non è che 'un' addizione abbreviata. Adunque in questo caso, come in ogni altro, incominceremo la moltiplicazione sempre dalla dritta. Scriviamo il moltiplicatore 6 sotto le unità del moltiplicando 348, e tiriamo al di sotto una linea per separare i fattori dal prodotto:

$$\begin{array}{r} 348 \\ 6 \\ \hline 2088. \end{array}$$

Il prodotto di 6 per 8 unità essendo 48 unità, cioè 4 decine ed 8 unità, notiamo 8 al posto delle unità, e serbiamo le 4 decine per unirle al prodotto delle decine. Quivi diremo che il prodotto di 6 per 4 è 24 cui bisogna aggiungere 4 decine ritenute, tal che avremo un totale di 28 decine, cioè 8 decine e 2 centinaia; noi riterremo 2 centinaia, e scriveremo solamente 8 sotto la linea al posto delle decine. Operando su

le centinaia scorderemo il prodotto di 6 per 3 essere 18, cui uniremo le 2 centinaia ritenute, ed avremo 20 centinaia che noi scriveremo sotto la linea come le abbiamo trovate: sicchè il prodotto richiesto è 2088.

31. Ecco pertanto la regola generale, per moltiplicare un numero composto di quante cifre si vorrà per un numero di una sola cifra:

Si scriva il numero di una cifra sotto le unità dell'altro, e si tiri una linea per separarli ambidue dal prodotto: incominciando dalla dritta, si moltiplichi successivamente ogni cifra del moltiplicando per la cifra del moltiplicatore, e se il prodotto non passi 9, si scriva sotto la linea al posto corrispondente alla cifra del moltiplicando; altrimenti, si scrivano sotto la linea le sole unità corrispondenti alla cifra del moltiplicando, e le unità della specie più alta si ritengano per unirle a quelle del prodotto seguente; finalmente l'ultimo prodotto parziale si noti tal quale si è trovato.

32. Passiamo alla moltiplicazione di un numero composto per un altro ancor composto: vogliasi, per esempio, moltiplicare 8576 per 279. Scriviamo il numero minore sotto il maggiore, e tiriamo sotto di essi una linea per separarli dal prodotto, come qui appresso si vede:

$$\begin{array}{r}
 8576 \\
 \underline{279} \\
 75584 \\
 58652 \\
 16752 \\
 \hline
 \text{Prodotto.....} \quad 2536904.
 \end{array}$$

Essendo il moltiplicatore 279 composto di 2 centinaia, di 7 decine e di 9 unità, per avere il prodotto, bisogna prendere il moltiplicando 8576 prima 9 volte, indi 7 decine di volte, e finalmente 2 centinaia di volte: or il prodotto di 8576 per 9 è 75584 ( il quale dee rinvenire come nell' articolo precedente ); il prodotto poi dello stesso moltiplicando per 7 è 58652, ma si dovea prendere 70 volte, dunque converrebbe moltiplicare 58652 ancor per 10, tal che il vero prodotto sarebbe 586520; scrivendolo sotto al primo prodotto, la di lui cifra 0 occuperebbe il posto delle unità: onde avendo noi trascurato di scrivere 0 sotto al 4, abbiamo avuto cura di scriverlo in modo che la prima cifra 2 di questo secondo prodotto corrisponda con le decine del primo. Similmente il prodotto di 8576 per 2 è 16752; ma quel numero si dovea ripetere 2 centinaia di volte, onde bisognerà moltiplicare 16752 ancor per 100, in maniera che il vero prodotto sarà 1675200. Ma scritto questo prodotto sotto gli altri due, i due zeri che sono alla dritta di lui occuperebbero i posti delle unità e delle decine, onde si sono trasandati, e

si è scritto in modo il prodotto 16752 che la prima cifra di esso 2 cada sotto le centinaia de' due primi prodotti: ora non resta che ad aggiungere i tre prodotti parziali, per avere il prodotto totale addimandato, che si troverà essere 2336904,

33. Da ciò che si è detto ne siegue una regola generale per la moltiplicazione di due numeri composti. Eccola:

Si scriva il numero più piccolo sotto al più grande, e si tiri una linea per separare i fattori dal prodotto; indi si moltiplichino il fattor superiore per ciascuna cifra del moltiplicatore, come si è detto nell'articolo 30., avendo cura di scrivere la cifra che è la prima a dritta di ogni prodotto parziale sotto la cifra del moltiplicatore sulla quale si opera; finalmente avendo trovati i prodotti parziali, si aggiungano insieme: la somma di essi sarà il prodotto totale ricercato.

Ecco ancora molti esempi di moltiplicazione, affinchè i principianti si possano esercitare.

|                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| 380475                       | 5700346                  |
| 328                          | 3742                     |
| <u>3045784</u>               | <u>11400692</u>          |
| 760946                       | 22801384                 |
| 1141419                      | 39902422                 |
| Prodotto... <u>124795144</u> | <u>17101038</u>          |
|                              | Prodotto... 21350694732. |

|                         |
|-------------------------|
| 780976                  |
| 6897                    |
| <u>5466832</u>          |
| 7028784                 |
| 6247808                 |
| <u>4685856</u>          |
| Prodotto... 5586391472. |

34. Siccome tutti gli esempi di moltiplicazione da noi dati finora sono caduti sopra numeri astratti, era in nostro arbitrio di scegliere per moltiplicando quello de' due fattori che meglio ne piaceva; e la nostra scelta è stata costantemente sul maggiore de' due numeri dati, poichè con ciò si rende il calcolo men lungo: in effetti basta di gettare lo sguardo su la operazione che siegue, per convincersi della verità della nostra asserzione.

$$\begin{array}{r}
 279 \\
 8376 \\
 \hline
 1674 \\
 1953 \\
 837 \\
 2252 \\
 \hline
 \text{Prodotto} \dots 2336904.
 \end{array}$$

55. Allorchè però la moltiplicazione è su numeri concreti , il moltiplicando , della cui medesima specie esser debbe il prodotto , vien fissato dallo stato della quistione ; onde pare che in questo caso la nostra scelta non possa più aver luogo. Proponiamoci , per esempio , di sapere quanti ducati fanno 4 canne di drappo a ducati 23 la canna ; è chiaro che il prodotto esser dee di ducati , e perciò 23 sarà il moltiplicando , e 4 il moltiplicatore , tal che il richiesto prodotto sarà 92 ducati. Ma se ci proponessimo di sapere quanti ducati fanno 23 volte 4 ducati , il prodotto esser dee pure in ducati , onde 4 sarà il moltiplicando , e 23 il moltiplicatore : ma rammentiamoci che 23 volte 4 è lo stesso che 4 volte 23 , quindi , in vece di ripetere 23 volte 4 ducati , possiamo dire di voler ripetere 4 volte 23 ducati ; per la qual cosa , anche in questo caso , si potrà considerare 23 per moltiplicando , e 4 per moltiplicatore ; il prodotto sarà sempre 92 ducati. Sicchè in ogni moltiplicazione si può assumere il più grande de'

due fattori per moltiplicando, ed il più picciolo per moltiplicatore; nel caso però di numeri concreti, fatta la operazione, converrà considerare il prodotto della medesima specie del moltiplicando che viene fissato dallo stato della quistione.

36. Se il moltiplicatore si possa decomporre in due o più fattori, la moltiplicazione si renderà più breve nel seguente modo: si rinvenga il prodotto del moltiplicando per un fattore, indi si moltiplichino un tal prodotto per l'altro fattore, e così si continui successivamente per gli altri fattori di detto moltiplicatore. Si è accennato questo mezzo essere più corto per trovare il prodotto di due numeri, perciocchè fa risparmiare l'addizione de' prodotti parziali. Così volendosi moltiplicare 586 per 54, si decomponga 54 ne' due fattori 9 e 6, e si moltiplichino prima 586 per 9, indi si moltiplichino il prodotto 5274 per 6; sarà il richiesto prodotto 20844.

37. Dal sistema della numerazione si rileva facilmente che per moltiplicare un qualsivoglia numero, per esempio, 587 per 10, basta aggiungere uno zero al moltiplicando, onde il richiesto prodotto sarà 5870. Ed in vero in questo modo il numero 587 diverrà dieci volte maggiore, diventando le unità decine, le decine centinaia, e le centinaia migliaia. Similmente si proverà che per moltiplicare il detto numero 587 per 100, 1000, ec. basterà aggiungere alla destra di 587 due zeri, tre zeri ec.: ed in generale, per ottenere il prodotto di un numero moltiplicato per l'unità seguita da quanti zeri si vogliano,

bisognerà aggiungere alla destra del moltiplicando un ugnal numero di zeri.

38. Queste considerazioni ci conducono a rinvenire delle regole onde abbreviare in molti casi la moltiplicazione. Di fatti se vogliasi un numero moltiplicare per 20, sarà lo stesso ( come si è osservato nell' articolo 36. ) che moltiplicarlo prima per 2, e poi per 10: ma per ottenere il prodotto di un numero per 10 basta aggiungere uno zero alla dritta di esso numero; dunque per ottenere il prodotto di un numero per 20, converrà moltiplicare esso numero per 2, ed aggiungere uno zero alla dritta del prodotto. Similmente, dovendosi moltiplicare un numero per 200, 2000 ec. basta moltiplicarlo per 2, ed aggiungere alla destra del prodotto che si otterrà, due zeri, tre zeri ec. Si proverà parimente che per moltiplicare un numero per 30, 300, 3000 ec., basterà moltiplicarlo per 3, e poi aggiungere al prodotto uno, due, tre zeri, ec. Sicchè generalmente: 1.<sup>a</sup> se il moltiplicatore è terminato da zeri, si otterrà il prodotto eseguendo la moltiplicazione su le sole cifre significative, ed aggiungendo in fine di un tal prodotto tanti zeri quanti sono nel moltiplicatore; 2.<sup>a</sup> potendosi i fattori scambiare l' un per l' altro, se il moltiplicando è terminato da zeri, si potrà esso considerare come il moltiplicatore; onde si farà pure il prodotto delle sole cifre significative, ed in fine di esso prodotto si porranno tanti zeri quanti sono nel moltiplicando; 3.<sup>a</sup> finalmente se tutti e due i fattori sono terminati da zeri, facendo astrazione

dai zeri del moltiplicatore, bisognerà moltiplicare le cifre significative de' due fattori, indi aggiungere alla destra del prodotto i zeri del moltiplicando; di poi considerando i zeri del moltiplicatore, è chiaro che converrà aggiungere in fine del prodotto già avuto i zeri del moltiplicatore: adunque se i due fattori sono terminati da zeri, si farà solamente la moltiplicazione delle loro cifre significative, indi si aggiungeranno alla dritta del prodotto tanti zeri quanti sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.

Ecco un esempio per ciascuno di questi tre casi.

|                                                                                                                              |                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{array}{r}  54847 \\  3700 \\  \hline  245929 \\  104541 \\  \hline  \text{Prodotto.... } 128955900  \end{array}  $ | $  \begin{array}{r}  2580000 \\  623 \\  \hline  714 \\  476 \\  \hline  1428 \\  \hline  \text{Prodotto... } 1482740000  \end{array}  $ |
|                                                                                                                              | $  \begin{array}{r}  789000 \\  3700 \\  \hline  5523 \\  2567 \\  \hline  \text{Prodotto.... } 2919300000  \end{array}  $               |

### *Della divisione.*

39. Si è veduto nel capitolo precedente come si dovea trovare il prodotto essendo dati i due fattori; ora cerchiamo una regola onde rinvenire un fattore, l'altro fattore ed il prodotto essendo dati.

Perciocchè il prodotto contiene un fattore tante volte ripetuto quante sono le unità dell' altro , è chiaro , che , se dal prodotto si sottragga il dato fattore tutte le volte che si può , il numero che indica quante volte si è fatta la sottrazione , sarà il fattor che si cerca. Così 24 è uguale a 8 moltiplicato per 3 ; quindi se 24 e 8 son dati , e si cerca il numero che moltiplicato per 8 faccia 24 , si toglierà 8 da 24 tutte le volte che si può ; e come si può togliere 3 volte , si conoscerà esser 3 quel numero che moltiplicato per 8 fa 24. Similmente se 24 e 3 essendo dati , si dimandi il numero che moltiplicato per 3 dia per prodotto 24 , si dovrebbe sottrarre 3 da 24 tutte le volte che si può ; e perchè si può sottrarre 8 volte , si conchiuderà 8 essere quel numero che moltiplicato per 3 dà per prodotto 24. Ma se il prodotto sia un numero molto grande , ed in esso contengasi il fattor dato un gran numero di volte , la molteplicità delle sottrazioni renderebbe il calcolo troppo lungo e laborioso ; onde si è cercato di semplificarlo per mezzo di un' operazione , la quale dicesi propriamente *divisione*.

Adunque la divisione è una sottrazione abbreviata : è un' operazione per la quale dati due numeri disuguali , se ne cerca un altro che indica quante volte il numero minore si contiene nel maggiore. Il numero che si dee dividere , chiamasi *dividendo* ; quello per cui si dee dividere , chiamasi *divisore* ; e'l numero che si cerca , dicesi *quoto* o *quoziente* , dal latino *quo-*

*ties*, chè significa quante volte: in effetti questo numero denota quante volte il divisore si contiene nel dividendo.

40. Faremo qui su la natura delle unità del dividendo, del divisore e del quoziente, delle riflessioni analoghe a quelle che abbiamo fatte nella moltiplicazione su la natura delle unità dei fattori e del prodotto.

Non è dal dividendo, nè dal divisore che si può giudicare della natura delle unità del quoto, ma bensì dallo stato della quistione.

Ed in vero, il dividendo e'l divisore essendo gli stessi e pel valore numerico e per la specie, si possono ottenere quoto di differente natura secondo i varii stati della quistione. Il quoto sarà un numero astratto, se ci proponiamo di sapere quante volte 2 ducati si contengano in 10 ducati. Il quoto indicherà persone nella seguente domanda: a quante persone converrà dividere 10 ducati, perchè ciascuna abbia 2 ducati? Il quoto sarà di canne, di braccia, ec. se vogliamo sapere quante canne, quante braccia, ec. ci spettano con 10 ducati, valendo 2 ducati una canna, un braccio ec. Resta dunque provato che la natura delle unità del quoto può solo essere fissato dallo stato della quistione.

41. Percorriamo tutti i casi della divisione, incominciando dai più semplici.

Sapendo già noi i prodotti de' numeri semplici moltiplicati tra loro a due a due, sarà facile di conoscere il quoto di un numero semplice per un numero semplice, o di un numero composto

non maggiore di 81 per un numero semplice ; perciocchè si sa il quoto essere quel numero per cui converrebbe moltiplicare il minore de' due numeri dati per avere il maggiore. Così si dirà 9 essere il quoto di 45 per 5, perchè si sa che il prodotto di 5 per 9 è 45: similmente si dirà 8 essere il quoto di 72 per 9, perchè si sa che il prodotto di 8 per 9 è 72.

42. Ma potrebbe stare che il dividendo non contenesse il divisore un esatto numero di volte, come se volesse sapersi il quoto di 47 per 9; anche in questo caso ci può servire di aiuto la conoscenza de' prodotti de' numeri semplici moltiplicati tra loro a due a due: imperocchè, sapendo che il prodotto di 9 per 6 è 54, e quello di 9 per 7 è 63, si vedrà che il vero quoto è tra 6 e 7, cioè maggiore di 6 e minore di 7; onde prendendo 6 per quoto della divisione di 57 per 9, e sapendo che 6 per 9 fa 54 e non già 57, diremo esservi ancora un resto 3 da dividersi per 9.

In questo caso, come in ogni altro simile, per indicare che vi è ancora un resto a dividere, si scriva questo accanto al quoziente e sotto vi si ponga il divisore, avendo la cura di separare l'un dall'altro per mezzo di una lineetta orizzontale. Quindi per esprimere che nella divisione di 57 per 9 il quoto è 6, e che resta ancor 3 a dividere per 9, si scriverà  $6\frac{3}{9}$ .

Espressioni di questa forma, come sarebbero  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{1}{10}$ , si dovrebbero enunciare 3 diviso per 4, 4 diviso per 7, 7 diviso per 10; ma per abbreviare si enunciano, tre quarti, cinque settimi,

sette decimi; quando però il divisore è al di là di 10, se gli dà la terminazione in *esimo*; come  $\frac{6}{12}$ ,  $\frac{11}{12}$ ,  $\frac{23}{12}$ , le quali espressioni si enunciano: cinque dodicesimi, undici diciottesimi, ventitrè trentacinquesimi.

43. Passiamo al caso in cui il divisore è un numero semplice, e'l dividendo un numero composto qualsivoglia; e per meglio intendere la natura di questa operazione, moltiplichiamo prima un numero composto di molte cifre per un numero semplice, per esempio, 378 per 6, e scriviamo distintamente i prodotti dell'unità, delle decine e delle centinaia, nella seguente maniera:

$$\begin{array}{r} 378 \\ 6 \\ \hline 48 \\ 42 \\ 18 \end{array}$$

Prodotto totale... 2268

Sicchè i prodotti parziali sono 48 unità, 42 decine, e 18 centinaia: or in questo stato niente sarebbe più facile che di dividere il prodotto totale 2268 per 6, perciocchè, essendo la divisione l'operazione inversa della moltiplicazione, bisognerebbe dividere per 6 i prodotti parziali 48 unità, 42 decine, 18 centinaia: ciò che si può fare ugualmente incominciando dalle più basse, o dalle più alte unità. Ed in vero, nel primo caso, essendo 48 unità divise per 6, si ottiene per quoto 8 unità; indi dividendo 42 decine per

6, si avrà per quoto 7 decine; e finalmente essendo 18 centinaia divise per 6, si otterrà per ultimo quoto 3 centinaia: sicchè il quoziente di 2268 per 6 sarà 378. Similmente, volendo incominciare la divisione dalle unità più alte, cioè dalle centinaia, pel caso che stiamo esaminando, troveremo il quoto di 18 centinaia per 6 essere 3 centinaia; quello di 42 decine per 6 essere 7 decine; e finalmente quello di 48 unità per 6 essere 8 unità: onde il quoziente di 2268 per 6 sarà, come prima, 378. Ma poichè il prodotto totale è il solo che si conosce, quando si propone a fare una divisione, ed in esso dal prodotto delle unità possono rifluire delle decine sul prodotto delle decine, e dal prodotto delle decine possono parimente rifluire delle centinaia sul prodotto delle centinaia, ec.; così riuscirà più semplice e più comodo di cominciare la divisione dalla sinistra, imperocchè il resto delle unità di una specie più alta si potrà risolvere in unità della specie inferiore, e così separare i parziali prodotti che debbonsi partitamente dividere pel divisore, onde ottenere i quoti parziali de' quali si compone il quoto della divisione che si è proposta. Riprendiamo l'esempio di sopra, e serva esso di tipo alla operazione di cui si tratta:.

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 \hline
 378
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2268 \\
 18 \\
 \hline
 46 \\
 42 \\
 \hline
 48 \\
 48 \\
 \hline
 00.
 \end{array}$$

Dopo aver collocato il divisore 6 alla sinistra del dividendo 2268, tiriamo sotto al divisore una linea, per separarlo dal quoziente che dovrà essere scritto sotto questa linea: incominciamo a dividere le 2 migliaia del dividendo per 6, e poichè non si può avere per quoto neppure 1 migliaia, risolviamo le 2 migliaia in 20 centinaia, le quali unite alle 2 centinaia del dividendo daranno un totale di 22 centinaia; il quoto di 22 centinaia per 6 è 3 centinaia, che noi scriveremo nel primo posto a sinistra sotto la linea del divisore. Il quoto di 22 centinaia per 6 non è esatto, onde cercheremo il resto moltiplicando il suddetto quoto 3 pel divisore 6, e sottraendo il prodotto 18 che ne nasce, dal primo parzial dividendo 22; un tal resto sarà 4 centinaia. Queste 4 centinaia derivano dal prodotto delle decine, onde converrà abbassare alla destra del 4 la cifra 6 del dividendo significante pur essa decine, tal che si otterrà 46 decine per secondo dividendo parziale. Il quoto di 46 decine per 6 essendo 7 decine, noteremo 7 sotto la linea del divisore alla dritta del primo quoto 3 già avuto.

Siccome nemmeno il quoto di questa parzial divisione è stato esatto, otterremo il resto sottraendo dal parzial dividendo 46 decime il prodotto del quoto 7 pel divisore 6, che è 42; un tal resto sarà 4 decime. Queste 4 decime provenendo dal prodotto delle unità, conviene che si sciolgano in unità; e perciò bisogna abbassare accanto a 4 l'ultima cifra 8 del dividendo, di maniera che risulterà per terzo dividendo parziale 48 unità; ed il quoto di 48 unità per 6 essendo 8 unità, scriveremo 8 sotto la linea del divisore in ultimo posto, a contar dalla sinistra. Finalmente il prodotto di 8 unità per 6 essendo 48 unità, dobbiamo sottrarre 48 da 48; il resto è zero: onde conchiuderemo che la divisione di 2268 per 6 dà per esatto quoziente 378.

44. Siccome la divisione suole arrecare qualche imbarazzo ai principianti, ecco un altro esempio sul quale faremo ancora la disamina. Proponiamoci di dividere 74827 per 9:

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo... } 74827 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisore..... } 9 \\ \hline \text{Quoziente. } 8314\frac{1}{9} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r}
 \underline{72} \\
 28 \\
 \underline{27} \\
 12 \\
 \underline{9} \\
 37 \\
 \underline{36} \\
 1.
 \end{array}
 \end{array}$$

Qui in vece di collocare il divisore alla sinistra del dividendo, l'abbiamo situato a dritta, poichè si usa dell' uno o dell' altro modo; ed è buono che i giovani si avvezzino a questa doppia maniera: abbiamo tirato la solita linea, sotto la quale dovrà notarsi il quoziente. Consideriamo il dividendo decomposto nelle sue differenti unità, incominciando dalle più alte, le quali, nel caso nostro, sono decine di migliaia: dividiamo dunque prima 7 decine di migliaia per 9, e come non si ottiene neppure 1 decina di migliaia, concepiamo col pensiero 7 decine di migliaia risolte in 70 migliaia, le quali, unite alle 4 migliaia seguenti, fanno 74 migliaia; allora diciamo: il quoto di 74 migliaia per 9 è 8 migliaia, notiamo dunque 8 sotto la linea del divisore, nel primo posto a sinistra; moltiplichiamo il divisor 9 per questo quoto 8 migliaia, e scriviamo il prodotto 72 migliaia sotto a 74 primo dividendo parziale; fatta la sottrazione, il resto è 2 migliaia, che noi risolveremo in 20 centinaia alle quali aggiungeremo altresì le 8 centinaia del dividendo proposto, onde avremo 28 centinaia per secondo dividendo parziale. Dividendo 28 centinaia per 9, otterremo per quoto 3 centinaia; scriviamo adunque 3 accanto alle 8 migliaia del quoziente; indi moltiplichiamo il divisor 9 per 3 centinaia onde avere il prodotto 27 centinaia, che porteremo sotto le 28 centinaia del secondo dividendo parziale per farne la sottrazione: il resto sarà 1 centinaio ossia 10 decine, alle quali uniremo ancora le 2 decine, ed otterremo 12

decine per terzo dividendo parziale. Essendo divise 12 decine per 9, si ha per quoto 1 decina, quindi porremo 1 in seguito delle 3 centinaia del quoziente; ed il prodotto del divisor 9 per 1 decina essendo 9 decine, le noteremo sotto le 12 decine del dividendo per sottrarnele: il resto sarà 3 decine, che fanno 30 unità, e fanno 37 unità con le 7 unità del dividendo. Dividiamo finalmente 37 unità per 9, avremo 4 unità, che noteremo in seguito di 1 decina del quoziente: il prodotto del divisor 9 per 4 unità essendo 36 unità, scriviamole sotto l'ultimo dividendo parziale 37; fatta la sottrazione, resterà 1.

Essendo rimasto 1, lo scriveremo accanto al quoziente verso la dritta, e sotto vi porremo il divisor 9, separandoli per mezzo di una lineetta orizzontale, per indicare, che il quoto di 74827 per 9 è 8314, ma che resta ancora 1 unità a dividere per 9 (veggasi art. 39).

45. Abbiamo esposto a lungo i due esempi precedenti per far meglio comprendere ai giovani le differenti parti della divisione; ma la regola una volta ben compresa, si potrà operare con molto maggior brevità. 1.<sup>o</sup> Non è necessario di indicare le differenti unità di ogni dividendo, e di ogni quoto parziale; questo sarà sempre della medesima specie del dividendo, ed il valor che gli conviene gli sarà assegnato dalle cifre seguenti, cioè da quelle che provengono dalle successive divisioni: onde non si dovrà dire, per servirci del primo dividendo parziale del precedente esempio, il quoto di 74 migliaia per 9 è 8 migliaia;

ma basterà dire, 9 in 74 si contiene 8 volte. 2.<sup>o</sup> Neppure è necessario di scrivere i prodotti di ciascun quoto parziale pel divisore sotto i parziali dividendi, ma si potranno notare i resti a memoria. Ecco come più brevemente si farà la divisione di 74827 per 9:

$$\begin{array}{rcl} \text{Dividendo... } 74827 & \left\{ \right. & \text{Divisore....} 9 \\ \\ \text{Quoziente... } 8314 \frac{1}{9} \end{array}$$

Perciocchè 9 in 74 si contiene 8 volte, notiamo 8 per prima cifra del quoziente; ed il prodotto di 9 per 8 essendo 72, per giungere a 74, rimane 2, che con 8 fa 28 in cui 9 si contiene 3 volte; scriviamo 3 per seconda cifra del quoziente: il prodotto di 3 per 9 è 27, onde per giungere a 28 resta 1, che unito a 2 fa 12 in cui 9 si contiene 1 volta; scriviamo ancor 1 per terza cifra del quoziente: il prodotto di 9 per 1 facendo 9, per 12 avanzano 3, che con 7 fa 37 in cui 9 si contiene 4 volte; notiamo 4 per quarta cifra del quoziente: e poichè 4 moltiplicato per 9 fa 36, avanza 1 per 37; noi porremo 1 accanto al quoziente ottenuto, e sotto vi scriveremo il divisor 9 separandoli per mezzo di una lineetta orizzontale, tal che il quoto richiesto è 8314, ma rimane ancor 1 a dividere per 9.

46. Se nel corso delle parziali divisioni qualche dividendo non contenesse il divisore, bisognerebbe mettere zero nel quoto per dare ad

esso il conveniente valore , indi abbassare l'altra cifra del dividendo per continuar la divisione. Un tal caso avrebbe luogo , se ci proponessimo di dividere 24456 per 8.

Dividendo ... 24456      { Divisore...8

Quoziente... 3057.

Ed in vero operando della maniera insegnata, avremo per quoto 3057 , ove conviene osservare che la cifra 4 delle centinaia del dividendo non contenendo il divisore 8, abbiamo notato con zero la mancanza di questa specie nel quoto, acciòchè le altre cifre di esso abbiansi il debito valore.

Ma volendo penetrare più addentro la ragione del caso di cui si tratta , rammentiamoci che la quistione di dividere 24456 per 8 si può presentare sotto quest' altro aspetto : il prodotto 24456 ed il fattore 8 essendo dati , rinvenire l'altro fattore, cioè quel numero per cui converrà moltiplicare 8 onde risulti 24456 per prodotto; inoltre, riflettiamo che il prodotto di un numero per l'unità è il numero medesimo. Quindi se nel moltiplicatore non manchi veruna specie , non vi sarà mai nel prodotto totale un prodotto parziale indivisibile pel moltiplicando : onde qualora ciò succede , è segno che manca la specie nel moltiplicatore ; e se la cifra di questa specie trovasi nel prodotto , essa proviene solamente dal serbo della colonna precedente. Sicchè ogni volta

che un dividendo parziale non contiene il divisore, bisognerà scrivere zero nel quoziente il quale fa le veci del moltiplicatore.

47. Ecco la regola astratta e generale per la divisione di un numero composto di quante cifre si vorrà pel numero di una sola cifra.

Scrivasi il divisore alla dritta o alla sinistra del dividendo; e sotto al divisore tirisi una linea, sotto la quale sarà notato il quoziente. Veggasi quante volte il divisore si contiene nella prima cifra a sinistra del dividendo, o nelle prime due, se mai una non è sufficiente, e notisi il quoto sotto la linea del divisore; il prodotto di questo quoto pel divisore si sottragga dalla prima cifra o dalle due prime del dividendo, e notisi il resto; accanto al quale si abbasserà la seguente cifra del dividendo, per ottenere un secondo dividendo parziale: si pratichi con questo come si è fatto col primo parziale dividendo, e ciò si continui fino a che tutte le cifre del dividendo sieno esaurite. Se mai nel corso dell'operazione qualche dividendo non conterrà il divisore, si metterà zero nel quoziente; indi si abbasserà l'altra cifra per proseguire la divisione. Se in fine vi sia un resto, questo si scriverà accanto al quoziente, e sotto gli si scriverà il divisore, ambidue essendo separati da una lineetta orizzontale.

48. Esaminiamo l'ultimo caso, cioè quello in cui il dividendo e il divisore sono due numeri composti di tante cifre che si vorrà.

Non altrimenti che nella divisione di un numero composto per un numero semplice, mol-

tiplicheremo qui due numeri composti, acciocchè dalle differenti parti della moltiplicazione possiamo ravvisare quelle della divisione, che è l'operazione inversa. Moltiplichiamo, per esempio, l'un per l'altro, 9467 e 278:

Moltiplicando 9467 divisore.

Moltiplicatore 278 quoziente.

|                                   |       |                                     |
|-----------------------------------|-------|-------------------------------------|
| 3. <sup>o</sup> Prodotto parziale | 75756 | 3. <sup>o</sup> dividendo parziale. |
| 2. <sup>o</sup> Prodotto parziale | 65269 | 2. <sup>o</sup> dividendo parziale. |
| 1. <sup>o</sup> Prodotto parziale | 18934 | 1. <sup>o</sup> dividendo parziale. |
| <hr/> Prodotto totale             |       | 2631826 dividendo totale.           |

Si vede con un poco di attenzione:

1.<sup>o</sup> Che il prodotto totale si compone di tanti prodotti parziali, quante sono le cifre del moltiplicatore: ma ogni moltiplicazione si può ravvisare come una divisione in cui il prodotto fa le veci del dividendo, il moltiplicando fa l'ufficio del divisore, ed il moltiplicatore è il quoto; dunque ogni dividendo deesi comporre di tanti dividendi parziali, quante sono le cifre del quoto.

2.<sup>o</sup> Ogni prodotto parziale contiene unità della medesima specie, che la cifra del moltiplicatore da cui è provenuto; come 18934 contiene unità del terzo ordine, cioè delle centinaia: dunque ogni quoto parziale conterrà unità della medesima specie che il dividendo parziale da cui deriva.

3.<sup>o</sup> Ma ogni prodotto parziale, ed ogni moltiplicatore parziale si possono considerare come contenenti semplici unità, perciocchè la specie viene loro assegnata dal rango che essi occupa-

no: dunque eziandio il dividendo parziale, ed il quoto parziale si potranno considerare come contenenti semplici unità, conciossiachè il debito valore sarà loro assegnato dalle cifre seguenti.

4.° Ogni prodotto parziale non contiene un numero di cifre minore di quelle che ha il moltiplicando, nè può averne che una di più: di fatti, il minimo prodotto del moltiplicando per la cifra del moltiplicatore è quando questa cifra è 1, e in tal caso il prodotto è uguale allo stesso moltiplicando; il massimo prodotto sarebbe quando la cifra del moltiplicatore fosse 9, ed in questo caso non potrà avere che una cifra di più, come ognuno può assicurarsi moltiplicando qualunque numero per 9. Laonde il dividendo parziale non potrà avere che una cifra di più del divisore: e se qualche dividendo parziale non contiene il divisore, è segno che non vi era cifra significativa nel moltiplicatore, onde converrà mettere zero nel quoto.

5.° Ogni prodotto parziale avanza di un posto verso la dritta il prodotto parziale che lo precede; onde, dopo il primo dividendo parziale, ogni successivo dividendo prenderà una cifra verso la dritta del dividendo totale; e perciò accanto al primo quoto parziale vi saranno tante cifre, quante sono quelle che rimangono alla dritta del dividendo totale dopo il primo dividendo parziale.

6.° Finalmente se tolgasi il primo parziale prodotto dal prodotto totale, ciò che rimane in questo conterrà il moltiplicando ripetuto per tutte le cifre del moltiplicatore all'infuori della pri-

ma; e se tolgasi ancora il secondo prodotto parziale, ciò che resta conterrà il moltiplicando ripetuto per tutte le cifre del moltiplicatore all'infuori delle due prime, ec. Sicchè se dal dividendo totale tolgasi il primo dividendo parziale, ciò che rimane conterrà il divisore replicato per tutte le cifre del quoto, fuorchè la prima: e se tolgasi ancora il secondo dividendo parziale, ciò che rimane conterrà il divisore replicato per tutte le cifre del quoto, fuorchè le due prime ec. Allorchè dunque si fa la divisione, a misura che si trovi una cifra del quoto, bisogna moltiplicarla per tutto il divisore, e sottrarre il prodotto dal rispettivo dividendo parziale.

49. Siccome il prodotto totale è il solo che da noi si conosce, quando si propone una divisione, così l'arte di dividere consiste nel decomporlo ne' prodotti parziali dai quali è formato; lo che ci sarà facile dopo le riflessioni da noi fatte. Ecco perciò la regola generale della divisione di un numero composto per un altro ancor composto.

Si scriva il divisore alla destra, o alla sinistra del dividendo, e sotto al divisore si tiri una linea per separarlo dal quoto che gli si dovrà scrivere di sotto. Prendansi tante cifre sulla sinistra del dividendo quante sono quelle del divisore, e se non bastino, prendansi quante sono le cifre del divisore ed una di più; veggasi quante volte esse contengano il divisore, e notisi il quoto nel primo luogo a sinistra sotto la linea: il prodotto di questo quoto per tutto il divisore portisi sotto al primo dividendo parziale da cui convien sot-

trarlo. Si abbassi accanto al resto la cifra del dividendo la quale siegue immediatamente il primo dividendo parziale, e con ciò si otterrà il secondo dividendo parziale: dividasi questo pel divisore, ed il quoto scrivasi accanto al primo quoto verso la dritta; il prodotto di questo secondo quoto per tutto il divisore notisi sotto al secondo dividendo parziale; fatta la sottrazione, si noti il resto, che, unito alla cifra seguente del dividendo proposto, costituirà il terzo dividendo parziale. Su questo si operi della medesima maniera; e ciò si continui fino a che tutte le cifre del proposto dividendo sieno esaurite. Se nel corso delle parziali divisioni qualche dividendo non contenesse il divisore, pongasi zero al quoto, e si abbassi l'altra cifra per continuar l'operazione. Se in fine vi sia qualche resto, esso scrivasi accanto al quoto, e sotto al resto suddetto pongasi il divisore, essendone separati per mezzo di una lineetta orizzontale: ciò indicherà che il quoto ottenuto non è esatto, ma che rimane ancora qualche cosa a dividere pel divisore.

Applichiamo la regola a qualche esempio; e sia proposto di dividere 2631826 per 9467, che noi sappiamo dover dare per quoziente 278.

|                        |         |                 |                 |
|------------------------|---------|-----------------|-----------------|
| 1.° Dividendo parziale | 2631826 | {               | Divisore...9467 |
|                        | 18954   |                 |                 |
| 2.° Dividendo parziale | 75842   | Quoziente...278 |                 |
|                        | 66269   |                 |                 |
| 3.° Dividendo parziale | 75736   |                 |                 |
|                        | 75736   |                 |                 |
|                        | 00000.  |                 |                 |

Poichè le prime quattro cifre su la sinistra del dividendo non contengono il divisore , prendiamone cinque per primo dividendo parziale , e cerchiamo quante volte 26318 contiene 9467; come noi sappiamo che lo contiene 2 volte , scriviamo 2 per prima cifra del quoto : il prodotto del quoto 2 pel divisore 9467 essendo 18934, notiamo questo prodotto sotto al primo dividendo parziale; fatta la sottrazione, avremo per resto 7384 cui uniremo la cifra 2 del dividendo proposto , la quale viene immediatamente dopo il primo dividendo parziale ; con ciò il secondo dividendo parziale è 73842. Noi sappiamo il divisore 9467 in 73842 contenersi 7 volte , onde poniamo 7 accanto alla prima cifra 2 del quoto ; moltiplichiamo la cifra 7 del quoto per tutto il divisore 9467, e portiamo il prodotto 66269 sotto al secondo dividendo parziale dal quale conviene sottrarlo: il resto sarà 7573 , al quale aggiungeremo l'ultima cifra 6 del dividendo , ed otterremo per terzo ed ultimo dividendo parziale 75736. In questo si contiene il divisore 9467 otto volte , mettiamo adunque 8 accanto alla cifra del quoziente: il prodotto di 8 pel divisore 9467 è 75736, che sottratto dal terzo ed ultimo dividendo parziale, il resto sarà zero; onde noi conchiuderemo che il quoto di 2631826 per 9467 è 278.

50. Siccome nel precedente esempio abbiamo avuto in mira di far apprendere ai giovani la decomposizione del dividendo ne' dividendi parziali, così, per non troppo complicar la regola , abbiamo supposto sapersi il quoto di ogni parzial divi-

sione. Ma supponiamo quel che sempre avviene, che tali quoto non si sappiano, allora bisognerà fare de'tentativi per poterli rinvenire. Prima di procedere alla maniera di trovare con qualche facilità il quoto di ogni parzial divisione, premettiamo esservi un segno da conoscere se il quoto sia più grande, o più piccolo del dovere: egli sarà più grande, se moltiplicato per lo divisore dia un prodotto maggiore del dividendo parziale da cui si debbe sottrarre; ed egli sarà più picciolo, quando, sottratto il prodotto parziale dal dividendo parziale, risulti un resto uguale o maggiore del divisore. Quindi è che nel primo caso bisogna scemare la cifra del quoto parziale di 1, 2, ec. unità, e nel secondo caso bisogna aumentarla di 1, 2, ec. unità.

51. Intanto si può fare il saggio osservando quante volte la prima cifra a sinistra, o le due prime di ogni dividendo parziale contengono la cifra che è la prima a sinistra del divisore; ma per meglio intendere ciò, proponiamoci di dividere 37995281 per 5976:

Dividendo. 37995281  
35856

21392  
17928  
34648  
29880  
47681  
41832  
5849.

{ Divisore. 5976

Quoziente. 6357  $\frac{1149}{5976}$

Dopo aver collocati alla solita maniera il dividendo ed il divisore, osserviamo le prime quattro cifre che sono alla sinistra del dividendo non contenere il divisore, e perciò ne prendiamo cinque per primo dividendo parziale: incominciamo a vedere quante volte la prima cifra 5 del divisore si contiene nelle due prime cifre su la sinistra del dividendo, cioè in 37; or 5 in 37 si contiene 7 volte, e perchè 5 moltiplicato per 7 fa 35, per giungere a 37, avanzano 2: questa cifra 2 colla seguente cifra 9 fa 29, in cui 9 non si contiene 7 volte, onde bisogna che 5 in 37 si faccia contenere 6 volte; allora 5 moltiplicato per 6 facendo 30, per giungere a 37, avanzano 7; il resto 7 una con la cifra seguente 9 fa 79 in cui 9 si contiene 6 volte, e dà un resto molto grande, onde si può esser sicuro che le rimanenti cifre del divisore si conterranno anche 6 volte nelle seguenti cifre del dividendo parziale, unite ai rispettivi residui; sicchè notiamo 6 per prima cifra del quoto: moltiplichiamo questo quoto parziale 6 pel divisore 5976, e notiamo il prodotto 35856 sotto al primo dividendo parziale per farne la sottrazione; indi al resto 2139 poniamo accanto la seguente cifra 2 del dividendo proposto, per avere il secondo dividendo parziale 21392. Quivi ancora osserviamo che 5 in 21 si contiene 4 volte col resto 1, ma che 9 in 13 non si contiene altresì 4 volte; onde faremo che 5 in 21 si contenga 3 volte, in tal caso, vi è di resto 6 che unito alla cifra 3 fa 63, in cui 9 si contiene 3 volte, e lascia un resto molto

grande, di maniera che si è sicuro per le altre cifre del divisore: notiamo adunque 5 per seconda cifra del quoto; indi sottraiamo dal secondo dividendo parziale il prodotto della cifra 3 del quoto per lo divisore 5976, il qual prodotto è 17928; ed al resto 3464 scriviamo accanto la cifra 8 abbassata dal dividendo proposto, ed avremo 34648 per terzo dividendo parziale. Osserviamo la prima cifra 5 del divisore nelle due prime cifre che sono a sinistra di questo dividendo parziale, cioè in 34, contenersi 6 volte coll' avanzo di 4, il quale, unito alla seguente cifra 6, fa 46 in cui 9 non si contiene 6 volte, essendo il prodotto di 6 per 9 uguale a 54; bisogna dunque che 5 in 34 si contenga 5 volte, allora il resto è 9 che con 6 fa 96, in cui 9 si contiene 5 volte, ed il resto è molto grande, onde non si può dubitare per le altre cifre; e perciò scriviamo 5 per terza cifra del quoto: portiamo il prodotto 29880 che nasce dalla moltiplicazione di 5 pel divisore 5976, sotto al terzo dividendo parziale; fatta la sottrazione, resta 4768 cui poniamo accanto l' ultima cifra del dividendo proposto, ed avremo per quarto ed ultimo dividendo parziale 47681. Nelle cui due prime cifre a sinistra, cioè in 47, si contiene la cifra 5 del divisore 9 volte, e vi ha 2 di resto; se la cifra 2 uniscasi alla cifra seguente 6 si ha 26 in cui 9 non si contiene 9 volte; onde bisogna che 5 in 47 si contenga 8 volte, e in tal modo il resto sarà 7 che con la cifra 6 fa 76 in cui 9 si contiene altresì 8 volte: ma il resto sarà 4, essendo

il prodotto di 9 per 8 uguale a 72, la quale cifra 4 con la seguente 8 del dividendo parziale fa 48 in cui la terza cifra 7 del divisore non si contiene 8 volte; onde conviene che 5 in 47 si contenga 7 volte, allora il resto è troppo grande per esser sicuro che le rimanenti cifre del divisore si contengono ugual numero di volte nelle rimanenti cifre del quarto dividendo parziale, unite ai rispettivi residui; per la qual cosa scriviamo 7 per ultima cifra del quoto; togliamo dal quarto ed ultimo dividendo parziale il prodotto 41852, che nasce dalla moltiplicazione del divisore 5976 per lo quoto 7, ed avremo per resto della divisione 5849. Notiamo questo resto accanto al quoziente, e sotto poniamo il divisore 5976, avendoli separati con la solita lineetta; ed in fine concludiamo che il quoto di 37995281 diviso per 5976 è 6357, e che rimane anche 5849 a dividere per 5976.

52. È chiaro dalla natura della moltiplicazione, che se facciasi doppio, triplo .... il moltiplicando, sarà altresì duplicato, triplicato .... il prodotto, non variando però il moltiplicatore; e similmente, non variando il moltiplicatore, il prodotto si farà la metà, la terza parte, ec., se il moltiplicando addivenga la metà, la terza parte, ec.; dunque il quoto della divisione, il quale viene rappresentato dal moltiplicatore, non si muterà, se il dividendo e il divisore si moltiplichino ovvero si dividano per uno stesso numero. Per la qual cosa quando il dividendo e il divisore sono terminati da zeri, può sempli-

ficarsi la divisione, togliendo da ciascuno de' due tanti zeri quanti sono in quello che ne ha il meno. Di fatti volendosi dividere 320 per 40, basterà dividere 32 per 4; perciocchè, essendo 320 uguale a 32 moltiplicato per 10, e 40 uguale a 4 moltiplicato per 10, il fattor 10 si può supprimere. Similmente, in vece di dividere 54000 per 600, si dividerà 540 per 6; conciosiachè 54000 è uguale a 540 moltiplicato per 100, e 600 è uguale a 6 moltiplicato per 100, onde il fattor 100 si può supprimere.

Ma se il solo divisore è terminato da zeri, allora in questo si supprimeranno i zeri, e su la dritta del dividendo si toglieranno tante cifre significative quanti sono i zeri del divisore; eseguita però l'operazione, fa d' uopo che le cifre suppressse facciano parte del resto della divisione. Così dovendosi dividere 547 per 90, supprimerassi zero nel divisore e la cifra 7 nel dividendo, indi si farà la divisione di 54 per 9; ottenuto 6 per quoto, bisogna contare la cifra 7 come resto della divisione, tal che il quoto sarà  $6\frac{7}{90}$ . La ragione di ciò è chiarissima: il numero 547 può considerarsi come formato di 540 e 7, onde dovrà dividersi 540 per 90, indi 7 per 90, ovvero, per ciò che qui sopra si è detto, dovrà dividersi 54 per 9, indi 7 per 90; quindi il quoto sarà  $6\frac{7}{90}$ .

Ecco un esempio per ciascuno di questi due casi.

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo } 5678/000. \\ \hline 37 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisore... } 37/000. \\ \hline \text{Quoziente. } 153 \frac{1}{17} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 197 \\ 185 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \hline \end{array}$$

17.

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo } 3725/892 \\ \hline 336 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisore } 48/000. \\ \hline \text{Quoziente } 77 \frac{3000}{48000} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 365 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 336 \\ \hline \end{array}$$

29.

*Delle prove della moltiplicazione  
e della divisione.*

53. Si può verificare la moltiplicazione dividendo il prodotto per uno de' fattori, il quoziente sarà l'altro fattore.

Così nell'esempio che segue, inferiremo la moltiplicazione esser fatta a dovere, perchè dividendo il prodotto 2529126 per 738, risulta per quoziente 3427, cioè l'altro fattore.

|                                                                                                                         |                |                                                                                              |                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 3427 \\ 758 \overline{) 27416} \\ 10281 \\ \hline 25989 \\ \hline \text{Prod. } 2529126. \end{array}$ | Divid. 2529126 | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Divisor. } 758 \\ \text{Quozien. } 3427 \end{array} \right.$ | $\begin{array}{r} 2214 \\ 5151 \\ 2952 \\ \hline 1992 \\ 1476 \\ \hline 5166 \\ 5166 \\ \hline 0000. \end{array}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Bisognerebbe peraltro evitare questa specie di prova, poichè c'impegna in una divisione, operazione più difficile della moltiplicazione che si vuol provare.

Soggiungeremo nella seguente nota un regola rimarchevole per la sua semplicità (\*).

(\*) Supponiamo che si cerca il prodotto di 3876 per 583. Si decomponga 3876 in due parti di cui l'una sia il resto della divisione 3876 per 9, tal che risulti 3876 uguale a 9 moltiplicato per 430, più 6; or, se 8376 si moltiplichino per 583, è chiaro che 9 moltiplicato per 430 darà un multiplo di 9; per la qual cosa il prodotto di 3876 per 583 diviso per 9, debbe avere il medesimo resto che 6 moltiplicato per 583 diviso per 9: ma se eziandio 583 decompongasì nella medesima maniera, cioè in 9 moltiplicato per 64, più 7, e si moltiplichino per 6, il resto della divisione per 9 sarà quel medesimo che si ottiene dal prodotto di 6 per 7 diviso

54. Si verifica la divisione , moltiplicando il quoziente per lo divisore , ed aggiungendo al prodotto il resto della divisione se mai ve ne sia stato.

---

per 9: sicchè il resto che si ottiene al prodotto di due numeri è quel medesimo che si ottiene al prodotto dei resti de' fattori.

Da ciò si deduce una regola per assicurarsi della giustezza di una moltiplicazione , la qual regola suole chiamarsi la *pruova del nove*. 1.<sup>o</sup> Si divida per 9 il moltiplicando , e si noti il resto ; 2.<sup>o</sup> si divida parimente per 9 il moltiplicatore , e si noti il resto ; 3.<sup>o</sup> si noti altresì il resto che si ottiene dal prodotto de' due primi resti diviso per 9 ; 4.<sup>o</sup> finalmente si osservi il resto del prodotto de' due numeri diviso per 9 ; se questo quarto resto è uguale , al terzo , si conchiuderà che la moltiplicazione è fatta a dovere.

La medesima cosa avrebbe luogo per ogni altro divisore , in vece di 9 , ma la proprietà di cui gode questo numero lo fa preferire ad ogni altro ; la proprietà è la seguente : *le cifre del prodotto di qualunque numero semplice moltiplicato per 9 , considerate come semplici unità , fanno sempre 9*. Per lo che non fa mestieri di dividere per 9 i fattori ed il prodotto , ma basta di aggiungere insieme le loro cifre , e di supprimere 9 ogni volta che la somma eccede questo numero.

Applichiamo la presente regola a verificare il prodotto 154572342 , che nasce dalla moltiplicazione di 53783 per 2874.

Aggiungendo insieme come semplici unità le cifre del moltiplicando 53783 , e supprimendo 9 egui volta che si può , resta 8 ; facendo altrettanto sul moltiplicatore 2874 , resta 3 ; dividendo per 9 il prodotto di 8 per 3 , cioè 24 , si ha 6 per resto ; finalmente aggiungendo insieme come semplici unità le cifre del pro-

Per esempio , conchiuderemo esser esatta la divisione che viene qui appresso , perchè moltiplicando il quoto 68715 pel divisore 784 , avremo per prodotto 53872560 , cui aggiunto il resto della divisione 646 , risulterà un numero uguale al dividendo 53873206.

---

dotto 15,572342 , e supprimendo 9 ogni volta che si può , si ottiene di resto anche 6 : sicchè la moltiplicazione che si volea provare , è esatta.

Ognun vede quanto questa pruova del 9 è semplice e spedita , ma infelicemente ci può indurre in errore per molti riguardi : 1.° quando si omette uno o più zeri ; 2.° quando si pone qualche zero di più ; 3.° qualora si scrivesse zero in vece di 9 , o al contrario ; 4.° qualora si fosse scritto qualche 9 di meno ; 5.° oppure qualche 9 di più ; 6.° se si fosse invertito l'ordine delle cifre , avendo scritto , per esempio , 82 in vece di 28 ; 7.° finalmente quando si fossero fatti degli errori che si compensano , come si fosse scritto 58 per 76 ; essendo la somma di queste cifre ugualmente 13.

Quanto alla divisione , ci basta di accennare che il divisore ed il quoziente si possono considerare come i fattori di una moltiplicazione di cui il dividendo è il prodotto ; onde non si stenterà fatica a concepire come si debba anche a questa operazione applicare la pruova del 9.

Osserviamo finalmente che se il primo resto è zero , sarà inutile di cercare il secondo , poichè il prodotto de' resti sarà zero. Allora si riduce , nella moltiplicazione , a trovare anche zero nel prodotto ; nella divisione senza resto , a trovare zero nel dividendo ; e nella divisione con resto , a trovare il medesimo resto nella divisione che nel dividendo.

|                 |            |            |                    |                |
|-----------------|------------|------------|--------------------|----------------|
| Dividendo       | 55873206   | {          | Divisore.....      | 784            |
|                 | 4704       | {          | Quoziente....      | 68715          |
|                 | <hr/> 6853 |            |                    |                |
|                 | 6272       |            |                    | 68715          |
|                 | <hr/> 5612 |            |                    | 784            |
|                 | 5488       |            |                    | <hr/> 274860   |
|                 | 1240       |            |                    | 549720         |
|                 | 784        |            |                    | <hr/> 481005   |
|                 | <hr/> 4566 |            | Prodotto.....      | 52872560       |
|                 | 3920       |            | Resto aggiunto.... | 646            |
| Ultimo resto... | 646        | Somma..... |                    | <hr/> 55873206 |

*Della ricerca de' fattori de' numeri.*

55. Si dice numero *primo* quello che non è divisibile che per se stesso, e per l'unità. Tali sono 2, 3, 7, 11, 13, 17, ec:

La legge di questi numeri è ignota: il Signor Lambert diede una tavola de' numeri primi dopo 1 sino a 102000. Sappiamo però che tra i numeri pari il solo 2 è primo, ogni altro numero pari essendo divisibile per 2; onde è che all'infuori di 2, tutti i numeri primi son dispari. Sarebbe un errore il credere che tutti i numeri dispari son primi: valgano di esempio 15 e 21, i quali son numeri dispari, ma non primi; perciocchè 15 è divisibile per 3 e per 5, e 21 è divisibile per 3 e per 7.

56. Due numeri si dicono *primi tra loro*,

quando non hanno altro fattore comune che l'unità.

Siegue da questa definizione che, affinchè due numeri sieno primi tra loro, non è necessario che ognuno di essi sia un numero primo; basta solamente che tra i loro fattori non ve ne sia uno comune ad entrambi. Così 6 non è un numero primo, nè tampoco lo è 35; ma 6 e 35 son due numeri primi tra loro, poichè i fattori di 6 sono 2 e 3, e quelli di 35 sono 5 e 7.

57. Ogni numero dispari o è primo, o è il prodotto di più numeri primi. Questa verità non si può dimostrare che per induzione. Prendasi un qualunque numero dispari, per esempio, 51, esso è un numero primo; 33 non lo è, ma è il prodotto di due numeri primi 3, 11. Similmente 43 è un numero primo: 45 non è primo, ma è il prodotto de' tre numeri primi 3, 3, 5.

58. Volendosi dunque i fattori di un numero, bisogna dividerlo per 2 fino a che si può; quando non si potrà più dividere per 2, converrà dividerlo per 3; quando non si potrà più dividere per 3, converrà dividerlo per 5; e così si continuerà successivamente a dividerlo per gli altri numeri primi, fino a che risulti un quoto uguale a 1: tutti i divisori disposti in una linea saranno i fattori ricercati.

Se il numero di cui si cercano i fattori è dispari, è inutile a dividerlo per 2, ma si comincerà a dividerlo per 3.

Se non possono aver luogo le suddette divi-

sioni è segno che il numero di cui si cercano i fattori è primo.

59. Applichiamo la presente regola a rinvenire i fattori di 300. Si divida 300 per 2, avremo per quoto 150; si divida ancor 150 per 2, avremo per quoto 75: si divida 75 per 3 (non potendosi più dividere per 2), avremo per quoto 25; si divida 25 per 5 (non potendosi più dividere per 3), avremo per quoto 5; si divida ancor 5 per 5, otterremo per quoto 1: sicchè i fattori semplici di 300 sono 1, 2, 2, 3, 5, 5.

Abbiamo posto per fattore anche 1, perchè 1 è fattore di tutti i numeri; abbiamo detto i fattori semplici, per distinguerli dai composti i quali nascono da' fattori semplici moltiplicati tra loro a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec. Or i fattori composti che risultano dalla moltiplicazione de' fattori semplici di 300 a due a due, esclusi gli uguali, sono 4, 6, 10, 15, 25; quelli che nascono dalla moltiplicazione de' fattori semplici a tre a tre, esclusi anche gli uguali, sono 12, 20, 30, 50, 75; quelli della moltiplicazione a quattro a quattro sono 60, 100, 150; finalmente quello della moltiplicazione a cinque a cinque è 300: onde tutti i fattori possibili di 300 sono:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300.

### *Delle frazioni.*

60. Abbiamo detto (42) che quando nella di-

visione vi è un resto, esso si nota accanto al quoziente sopra una linea, e sotto gli si scrive il divisore; volendosi con ciò indicare che rimane ancora una parte del dividendo a partire per lo divisore. Dovendosi, per esempio, dividere 18 ducati a 5 persone, il total quoziente sarebbe  $3 \frac{1}{5}$ , indicando  $\frac{1}{5}$  che restano ancora 3 ducati a dividere in cinque parti uguali, cioè a dire, che bisogna prendere ancora un quinto di 3 ducati; ma  $\frac{1}{5}$  di duc. è evidentemente la medesima cosa che tre volte un quinto di un ducato: adunque un quinto di tre ducati vale lo stesso che tre volte un quinto di un ducato. Sotto questo punto di veduta  $\frac{1}{5}$  è ciò che si chiama una *frazione*.

61. Ciò premesso: 1.° essendo il resto di una divisione sempre minore del divisore, ne siegue che una frazione è sempre minore dell'unità. 2.° Ogni frazione si esprime con due termini, uno inferiore e l'altro superiore separati tra loro per mezzo di una linea: il termine inferiore indica in quante parti uguali si è divisa l'unità, e chiamasi *denominatore*; il termine superiore denota il numero delle parti uguali che debbonsi prendere, e chiamasi *numeratore*. Così nella frazione  $\frac{7}{10}$  il denominatore è 10, che mostra l'unità essersi divisa in dieci parti uguali; il numeratore è 7, che indica doversi prendere sette di queste parti.

Sarebbe inutile di ripetere qui il modo di enunciare le frazioni, poichè ne abbiamo già parlato alla fine dell'articolo 59.

62. Si potrebbero presentare de' numeri sotto la forma di frazioni, nelle quali il numeratore è uguale oppure maggiore del suo denominatore: tali sarebbero  $\frac{7}{7}$ ,  $\frac{18}{6}$ ,  $\frac{21}{8}$ . Queste espressioni non essendo altra cosa che 7 a dividere per 7, 18 a dividere per 6, 21 a dividere per 8, sarebbero uguali a 1, 3 e  $2\frac{5}{8}$ : ma volendole considerare come frazioni, cioè come espressioni numeriche che indicano una o più parti dell'unità divisa in un certo numero di parti uguali, potremo pervenire ai medesimi risultamenti. Ed in vero  $\frac{7}{7}$  denota che l'unità si è divisa in 7 parti uguali, e che si debbono prendere tutte e sette queste parti, onde è chiaro che risulta l'unità; da ciò ne siegue che la seconda espressione  $\frac{18}{6}$  potendosi considerare come  $\frac{6}{6}$  più  $\frac{6}{6}$  più  $\frac{6}{6}$ , sarà uguale a 3; finalmente la terza  $\frac{21}{8}$  è la medesima cosa che  $\frac{16}{8}$  più  $\frac{5}{8}$ , quindi è uguale a  $2\frac{5}{8}$ . Che perciò le frazioni si distinguono in *vere*, e *spurie*; dicendosi vere quelle che sono minori dell'unità, cioè quelle in cui il numeratore è più piccolo del denominatore; e spurie, quando il numeratore è uguale o maggiore del denominatore.

63. Da ciò è manifesto: 1.<sup>o</sup> che si può rappresentare l'unità per mezzo d'infinite frazioni, poichè basta fare il numeratore uguale al denominatore; così 1 potrebbe essere rappresentato da tutte queste frazioni,  $\frac{4}{4}$ ,  $\frac{7}{7}$ ,  $\frac{41}{41}$ ,  $\frac{40000}{40000}$  ec.; 2.<sup>o</sup> che ogni numero intero si può presentare sotto la forma di una frazione, poichè basta sottoscrivere ad essi l'unità; così i numeri in-

teri 7, 9, 13, 100 ec. potrebbero mettersi sotto la forma di frazioni nel seguente modo:  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{2}{9}$ ,  $\frac{13}{13}$ ,  $\frac{100}{100}$ , ec.; 3.<sup>o</sup> che per ridurre un intero a frazione con un dato denominatore, senza che l'intero perda il suo valore, conviene moltiplicare l'intero per esso denominatore, e al prodotto sottoscrivere il medesimo denominatore dato: così volendosi mettere 3 in forma di frazione che abbia per denominatore 7, moltiplichiamo 3 per 7, e al prodotto 21 sottoscriviamo per denominatore 7, risulterà  $\frac{21}{7}$  uguale a 3; e la ragione è chiarissima, perchè l'unità è divisa in 7 parti uguali, e si sono prese 21 di queste parti, cioè tre volte 7: dunque si è presa tre volte l'unità.

64. Considerando una frazione come il quoto di una divisione in cui il numeratore fa da dividendo, e il denominatore da divisore, si può applicare ad essa il medesimo ragionamento dell'articolo 52, per conchiudere, che non si muta il valore di una frazione moltiplicando o dividendo sì il numeratore che il denominatore per qualsivoglia numero: ma volendo concepire una frazione sotto il di lei vero punto di veduta, come noi abbiamo notato in fine dell'articolo 60, potremo dimostrare la medesima verità nel seguente modo.

Se della frazione  $\frac{1}{4}$  si moltiplichi il numeratore 1 per 5, risulterà la frazione  $\frac{5}{4}$  tripla della frazion proposta: diciamo tripla della frazion proposta, perchè sì nella prima che nella seconda frazione l'unità è divisa in 4 parti

uguali, ma nella prima si prendono 5 di queste parti, e nella seconda 15, cioè 3 volte 5. Se della medesima frazione  $\frac{4}{24}$  si divida il denominatore 24 per 3, risulterà la frazione  $\frac{4}{8}$  eziandio tripla della frazione  $\frac{4}{24}$ ; perciocchè essendo nella frazione  $\frac{4}{8}$  l'unità divisa in 8 parti uguali, e nella frazione  $\frac{4}{24}$  la medesima unità divisa in 24 parti uguali, ognuna delle parti ottave valerà tre delle parti ventiquattresime; onde  $\frac{4}{8}$  equivalerà a 3 volte  $\frac{4}{24}$ . Sicchè si farà divenire una frazione un certo numero di volte maggiore, moltiplicando per esso numero il di lei numeratore, oppure dividendo per esso numero il di lei denominatore.

Applicando i medesimi ragionamenti dimostreremo; che se della frazione  $\frac{8}{11}$  si divida il numeratore 8 per 4, risulterà la frazione  $\frac{2}{11}$  quattro volte minore della frazione  $\frac{8}{11}$ ; e se per 4 si moltiplichi il denominatore 11 della frazione  $\frac{8}{11}$  risulterà la frazione  $\frac{8}{44}$  eziandio quattro volte minore della frazione  $\frac{8}{11}$ : onde potremo generalmente conchiudere che si renderà una frazione un certo numero di volte minore, dividendo per esso numero il di lei numeratore, oppure moltiplicando per esso numero il di lei denominatore.

Quindi se per un medesimo numero si moltiplichino tanto il numeratore quanto il denominatore di una frazione, essa non cangerà valore; e similmente non si cangerà il valore di una frazione, se dividasi per uno stesso numero tanto il di lei numeratore quanto il di lei denominatore.

65. Adunque si potrà sovente ridurre una frazione ad una forma più semplice di quella sotto cui si presenta. Sia la frazione  $\frac{84}{147}$ , possiamo dividere per 2 il numeratore ed il denominatore, di modo che la frazion proposta si farà uguale a  $\frac{42}{73.5}$ ; ma questa frazione si può anche ridurre a maggior semplicità, perciocchè dividendo per 5 tanto il numeratore quanto il denominatore, la frazion proposta risulterà uguale a  $\frac{8.4}{14.7}$ ; finalmente il numeratore ed il denominatore di questa ultima frazione si potranno dividere per 7, e con ciò la frazion proposta si troverà uguale a  $\frac{4}{7}$ . Non possiamo ridurla di vantaggio, perchè i numeri 2 e 7 della frazione essendo numeri primi tra loro, non hanno verun comune divisore: quando si è pervenuto a questo stato, si dice che la frazione è ridotta *alla più semplice espressione*, ovvero *a minimi termini*.

66. Per ridurre la frazione  $\frac{84}{147}$  alla sua più semplice espressione, abbiamo diviso il numeratore ed il denominatore prima per 2, indi per 3, e finalmente per 7; or se avessimo conosciuto essere 42 il più gran comune divisore de' due termini della frazione  $\frac{84}{147}$ , avremmo potuto dividere per 42 il numeratore ed il denominatore, e con ciò ridurre ad un tratto la frazion proposta alla sua più semplice espressione  $\frac{4}{7}$ . Sicchè il problema di ridurre una frazione alla più semplice espressione è naturalmente legato a quest' altro: *essendo dati due numeri, rinvenire il lor massimo comune divisore*.

67. La maniera che si presenta la prima per

la soluzione di questo problema, è di cercare, giusta l'articolo 59, i rispettivi fattori semplici de' due numeri dati, perciocchè il prodotto de' fattori comuni ad entrambi sarà il lor massimo comune divisore. Poniamo, in grazia d'esempio, volersi trovare il massimo comune divisore de' due numeri 2178 e 6930; cerchiamo rispettivamente i fattori semplici di questi numeri, dando al calcolo la disposizione che qui si vede, per meglio distinguerne i fattori.

|      |     |      |     |
|------|-----|------|-----|
| 2178 | 2   | 6930 | 2   |
| 1089 | 3   | 3465 | 3   |
| 363  | 3   | 1155 | 3   |
| 121  | 11  | 385  | 5   |
| 11.  | 11. | 77   | 7   |
|      |     | 11.  | 11. |

Essendo i fattori 2, 5, 3, 11 comuni ai due numeri 2178 e 6930, il prodotto di essi fattori, cioè 198 sarà il massimo comune divisore che si domanda.

68. Ora se i due numeri 2178 e 6930 costituissero una frazione della seguente forma  $\frac{2178}{6930}$ , è chiaro che dividendo per 198 il numeratore ed il denominatore, la frazione proposta si troverebbe ridotta alla sua più semplice espressione, la quale sarebbe  $\frac{11}{35}$ .

Che anzi il metodo da noi proposto ha anche il vantaggio di fare risparmiare le divisioni del numeratore e del denominatore per lo massimo comune divisore: ed in vero, basterà suppressere i fat-

tori comuni ad ambidue , indi moltiplicare a parte i fattori particolari al numeratore e quelli che sono particolari al denominatore; il primo prodotto sarà il numeratore della frazion che si cerca, ed il secondo ne sarà il denominatore. Di fatti, nella frazione  $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ , suppressi i fattori 2, 3, 5, 11 comuni ai due termini della frazione, 11 sarà il numeratore della frazione che si cerca, e 35 prodotto de' fattori 5 e 7, ne sarà il denominatore; in maniera che la frazion proposta si troverà ridotta alla sua più semplice espressione  $\frac{11}{35}$ .

69: Nondimeno quando i due termini della frazione, o uno di essi ammette molti fattori, il metodo da noi accennato per la indagine del massimo comune divisore riesce lungo e penoso; perciò vediamo se vi possa essere un metodo più abbreviato.

Per meglio spiegare le nostre idee proponiamoci due numeri, per esempio, 429 e 182. Se 182 divida 429, è evidente che 182 è il divisor che si cerca; ma fatta la divisione, si trova il resto 65 ed il quoziente 2. Egli è chiaro che quel numero che divide 65 e 182, dovrà cziandio dividere 429, che è uguale a 2 volte 182 più 55 ( art. 54 ); ed un tal numero non potrà essere maggiore di 65, altrimenti 65 sarebbe diviso da un numero maggiore di esso medesimo, lo che non può essere: adunque bisogna prima tentare se 65 non sia divisore di 182, perchè, se lo fosse, sarebbe 65 il divisor che si cerca: ma 182 diviso per 65 dà per quoziente 2, e per resto 52. Noi possiamo applicare al resto 52 i medesimi ragionamenti,

che abbiamo fatti sopra 65, per conchiudere che sarebbe 52 il divisor che si domanda, se 52 dividesse esattamente 65; lo che non è, perchè 65 diviso per 52 dà per quoziente 1, e per resto 13. Discorrendo sul resto 13 come su i resti 65 e 52, si vede che la nostra indagine si è ormai ridotta a trovare il più gran numero che divide 13 e 52, e prima bisogna vedere se non sia lo stesso 13. Di fatti diviso 52 per 13, il quoziente è 4 senza resto: adunque 13 è comune divisore di 429 e 182, e per quel che abbiain detto, è il massimo.

70. L'andamento da noi tenuto nella ricerca del massimo comune divisore di due numeri, si può riassumere nella seguente regola generale.

Si divida il maggiore de' due numeri pel minore, e se la divisione è fatta senza resto, il minore de' due numeri è il divisor che si cerca. Se ciò non succede, si divida il minore de' due numeri pel resto della divisione; se si ottiene un quoziente esatto, il resto della prima divisione sarà il massimo comune divisore addimandato. Ma se la seconda divisione è fatta con resto, si divida il primo resto pel secondo; similmente si divida il secondo resto pel terzo; indi il terzo pel quarto; e ciò si continui fino a che si abbia una divisione esatta. Allora il resto che fece da ultimo divisore, è il massimo comune divisore che si cerca; e se un tal resto è 1, si conchiuderà che i numeri, tra i quali si cerca il massimo comune divisore, sono primi tra loro.

71. È manifesto che con questo metodo si può rinvenire più speditamente il massimo comune

divisore de' termini di una frazione, e quindi ridurre la frazione medesima alla sua più semplice espressione; dividendo cioè per esso massimo comune divisore tanto il numeratore quanto il denominatore, e formando coi quozienti una nuova frazione. Egli è ancor manifesto, che, se nella indagine del massimo comune divisore risulti per ultimo resto 1, la frazion proposta è irriducibile.

Applichiamo la presente regola a due esempj, e facciamo vedere come si debba disporre il calcolo nella ricerca del massimo comune divisore: siano proposte le frazioni  $\frac{91}{175}$ , e  $\frac{490}{1496}$ .

$$483 \left\{ \frac{91}{5} \left\{ \frac{28}{3} \left\{ \frac{7}{4} \right. \right. \right.$$

$$5696 \left\{ \frac{490}{7} \left\{ \frac{266}{1} \left\{ \frac{224}{1} \left\{ \frac{42}{5} \left\{ \frac{14}{3} \right. \right. \right. \right.$$

In ciascuno di questi due esempj si è scritto alla dritta ogni resto, acciochè esso si trovi nel posto che dee occupare per la susseguente divisione, e sotto si sono notati i rispettivi quozienti. Ora si trova 7 massimo comune divisore pei termini della prima frazione, e 14 pei termini della seconda: in effetti 28 è divisibile per 7, e 42 per 14. Per la qual cosa dividendo per 7 i termini della prima frazione, e per 14 quelli della seconda, le frazioni proposte,  $\frac{91}{175}$  e  $\frac{490}{1496}$  si riducono a  $\frac{13}{25}$  e  $\frac{35}{224}$ .

Si potrà esercitare su la frazione  $\frac{13}{25}$  che si troverà irriducibile; e su la frazione  $\frac{35}{224}$  che si ridurrà a  $\frac{5}{32}$ .

72. Cerchiamo adesso la maniera di ridurre molte frazioni al medesimo denominatore. Primieramente esse non siano che due, come  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{5}{7}$ ; è chiaro che se si moltiplichi 4 per 7, e 7 per 4, il prodotto è il medesimo (28): dunque il prodotto de' denominatori delle due frazioni proposte può servire per comune denominatore alle due frazioni che si cercano. Ma affinchè una frazione non caugi il suo valore, per quel medesimo numero per cui si è moltiplicato il denominatore, si dee moltiplicare altresì il numeratore (64): dunque converrà moltiplicare 3 per 7, e 5 per 4. Vale a dire, per ridurre due frazioni al medesimo denominatore, bisogna moltiplicare vicendevolmente il numeratore dell'una pel denominatore dell'altra, e sottoporre, per comune denominatore, il prodotto dei denominatori.

Quindi le frazioni proposte  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{5}{7}$  si riducono a  $\frac{21}{28}$  e  $\frac{20}{28}$ .

Sieno inoltre tre frazioni quali sono  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{7}{8}$ : il prodotto de' denominatori 6, 5 e 8 è il medesimo, qualunque sia l'ordine col quale vengano moltiplicati; dunque un tal prodotto potrà essere il denominatore comune delle tre frazioni che si dimandano. Ma in esso prodotto il denominatore 6 della prima frazione trovasi moltiplicato per 5 e per 8; il denominatore 5 della seconda trovasi moltiplicato per 6 e per 8; finalmente il denominatore 8 della terza trovasi moltiplicato per 6 e per 5: dunque converrà moltiplicare anche il numeratore 5 per 5 e per 8; il numeratore 3 per 6 e per 8; ed il numeratore 7

per 6 e per 3. In tal modo le frazioni proposte  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{6}$  saranno uguali a  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1}$ ,  $\frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1}$  e  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1}$ .

Il medesimo ragionamento potendosi adattare a tutti i casi, possiamo generalmente conchiudere: che per ridurre più frazioni al medesimo denominatore, bisogna moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione per tutti i denominatori delle altre, eccetto il suo, e sottoscrivere a ciascun prodotto, per denominatore comune, il prodotto dei denominatori di tutte le frazioni.

73. Se due frazioni che si vogliono ridurre al medesimo denominatore sieno tali, che il denominatore dell' una divida esattamente il denominatore dell' altra, la riduzione si farà più brevemente nel seguente modo: si divida il denominatore maggiore pel minore, e si noti il quoziente; indi si moltiplichi per esso quoziente il numeratore ed il denominatore della frazione che ha il denominatore più piccolo. Vogliansi, per esempio, ridurre al medesimo denominatore le frazioni  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{1}{5}$ : dividiamo 35 per 7, il quoziente sarà 5; moltiplichiamo sì il numeratore 3 che il denominatore 7 per 5, la frazione  $\frac{3}{7}$  si cangerà in  $\frac{15}{35}$  del medesimo denominatore che  $\frac{1}{5}$ .

Col medesimo metodo si possono ridurre al medesimo denominatore anche più frazioni, purchè il denominatore di una sia divisibile pel denominatore di ciascun' altra. Sieno proposte le frazioni  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{1}{8}$ ; dividiamo 40 per 4, e 40 per 5, avremo per quozienti 10 e 8; moltiplichiamo per 10 il numeratore 3 ed il denominatore 4, e moltiplichiamo per 8 il numeratore 2 ed il denomina-

tore 5, le frazioni  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{3}{10}$  saranno ridotte al medesimo denominatore; esse saranno  $\frac{5}{20}$ ,  $\frac{8}{20}$  e  $\frac{6}{20}$ .

74. La riduzione delle frazioni al medesimo denominatore non solo dovrà servire al calcolo delle frazioni, ma ci fa altresì distinguere qual è la maggiore di due frazioni date. Sieno proposte le due frazioni  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{11}{13}$ , e vogliasi sapere qual di esse sia la maggiore: le frazioni  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{11}{13}$  ridotte al medesimo denominatore sono uguali a  $\frac{91}{143}$  e  $\frac{121}{143}$ ; onde la frazione  $\frac{11}{13}$  che è uguale a  $\frac{121}{143}$  è la maggiore.

### *Del calcolo delle frazioni.*

75. Siamo ormai nello stato di praticare su le frazioni le medesime operazioni, che abbiamo praticate su i numeri interi; cioè l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione. Ed avvertiamo in primo luogo che in tutti gli esempi che daremo, per l'applicazione delle differenti regole, le frazioni saranno ridotte alla loro più semplice espressione: e se mai risultino delle frazioni che nol fossero, noi le ridurremo alla più semplice espressione per mezzo di uno de' metodi che abbiamo esposti. Passiamo a vedere come si ottiene la somma di più frazioni.

Se le frazioni proposte hanno il medesimo denominatore, bisogna aggiungere insieme i numeratori, e scrivere sotto la somma il comune denominatore: se bisognasse sommare le frazioni  $\frac{5}{11}$ ,  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{10}{11}$ , aggiungeremo insieme i numeratori 5, 7 e 10, e sotto la somma 22 scriveremo per

denominatore 13; di modo che la somma richiesta sarà  $\frac{22}{13}$  ovvero  $1 \frac{9}{13}$ , estraendone l'intero.

La dimostrazione di questa regola dipende dalla natura delle frazioni: perciocchè in tutte tre le frazioni proposte l'unità è divisa in 13 parti uguali, e noi vogliamo aggiungere insieme 5, 7 e 10 di queste parti *tredicesime*, è chiaro che la somma esser dee  $\frac{22}{13}$  ossia  $1 \frac{9}{13}$ .

Quindi qualora le frazioni che si vogliono sommare non hanno il medesimo denominatore, bisogna prima ridurle al medesimo denominatore, indi sommarle come qui innanzi si è detto. Vogliansi, per esempio, sommare le frazioni  $\frac{7}{9}$ ,  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ : riduciamole al medesimo denominatore, ciò che le cambia in  $\frac{28}{36}$ ,  $\frac{24}{36}$  e  $\frac{9}{36}$ ; aggiungiamo insieme i numeratori 28, 24 e 9, la somma è 59; dunque la somma delle tre frazioni fa  $\frac{59}{36}$ : finalmente, estraendo l'intero, abbiamo  $1 \frac{23}{36}$ , per la somma cercata.

Se le frazioni si possano ridurre al medesimo denominatore per un mezzo più breve, come qui innanzi abbiamo insegnato, non si mancherà di servirsene. Se si dessero, per esempio,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{7}{9}$ , ove 18 è multiplo de' denominatori 2, 3 e 9; dividiamo successivamente 18 per 2, per 3 e per 9, e moltiplichiamo i quozienti 9, 6 e 2 pei rispettivi numeratori 1, 2 e 5, avremo le nuove frazioni  $\frac{9}{18}$ ,  $\frac{12}{18}$ ,  $\frac{10}{18}$  e  $\frac{7}{9}$ : aggiungendo insieme i numeratori 9, 12, 10 e 7, la somma è 38. Adunque tutte queste frazioni valgono insieme  $\frac{38}{18}$  ovvero  $2 \frac{19}{9}$ , estraendone gl'interi; o finalmente  $2 \frac{1}{3}$ , riducendo la frazione  $\frac{19}{9}$  alla sua più semplice espressione.

Se vi siano interi e frazioni ad aggiungere insieme, incominceremo a sommare dalle frazioni, acciocchè, se dalla lor somma risultino degli interi, questi si uniscano alla somma degl'interi proposti. Così volendosi sommare  $3\frac{2}{7}$ ,  $8\frac{3}{7}$  e  $5\frac{4}{7}$ , aggiungiamo prima le frazioni  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{4}{7}$ , la somma è  $\frac{9}{7}$  ossia  $1\frac{2}{7}$ ; uniamo 1 agl'interi 3, 8 e 5, la somma è 17. Sicchè la somma totale è  $17\frac{2}{7}$ .

Sovente occorre di ridurre un intero ed una frazione ad una sola frazione, come se volesse ridursi ad una sola frazione  $3\frac{2}{7}$ ; incominciamo a ridurre l'intero 3 a frazione col denominatore 7, giusta l'art. 58, esso intero addiverrà  $\frac{21}{7}$ ; uniamo ora insieme  $\frac{21}{7}$  e  $\frac{2}{7}$ , avremo  $\frac{23}{7}$ : sicchè  $3\frac{2}{7}$  è uguale a  $\frac{23}{7}$ . Da ciò si può dedurre la seguente regola per la riduzione di un numero intero e di una frazione ad una sola frazione: si moltiplichi l'intero pel denominatore della frazione data, e al prodotto si aggiunga il numeratore di essa frazione, e sotto la somma si scriva, per denominatore, il denominatore della frazione data.

Si può esercitare su questi esempi:  $7\frac{3}{4}$ ,  $15\frac{2}{5}$  e  $43\frac{1}{11}$ , le quali espressioni si riducano a  $\frac{29}{4}$ ,  $\frac{77}{5}$  e  $\frac{473}{11}$ .

76. Passiamo alla sottrazione delle frazioni. Quando le frazioni proposte hanno il medesimo denominatore, come si volesse, per esempio, da  $\frac{7}{4}$  sottrarre  $\frac{2}{4}$ , il resto sarebbe  $\frac{5}{4}$  ossia  $1\frac{1}{4}$ ; cioè bisogna togliere i numeratori l'un dall'altro, e dare al resto, per denominatore, il denominatore

comune: la ragione di questa regola si rileva facilmente dalla natura delle frazioni.

Quindi è che se le frazioni a sottrarsi non hanno il medesimo denominatore, bisogna prima ridurle, e poi operare su di esse come poco prima si è detto. Vogliasi, a cagion di esempio, da  $\frac{2}{9}$  sottrarre  $\frac{5}{12}$ : queste frazioni essendo ridotte al medesimo denominatore, si cangiano in  $\frac{4}{18}$  e  $\frac{7\frac{1}{2}}{18}$ ; onde converrà togliere 45 da 84, ed al resto 39 scrivere per denominatore 108; di maniera che il richiesto residuo è  $\frac{39}{108}$  ovvero  $\frac{13}{36}$ , dividendo per 3 il numeratore ed il denominatore.

Se mai interi e frazioni debbansi sottrarre da interi e frazioni, incominceremo il calcolo dalle frazioni, affinchè, se la frazione a sottrarsi sia maggiore di quella da cui si debba sottrarre, possiamo prendere dall'intero ad imprestito una unità, e ridurla con la frazione minore ad una sola frazione, secondo che abbiamo detto alla fine dell'art. prec.; indi faremo la sottrazione. Così dovendosi sottrarre  $8\frac{7}{9}$  da  $12\frac{1}{2}$ , incominceremo a togliere  $\frac{7}{9}$  da  $\frac{1}{2}$ , lo che non può farsi; perciò prendiamo ad imprestito da 12 una unità, la quale aggiunta a  $\frac{1}{2}$  fa  $\frac{3}{2}$ ; sottraiamo  $\frac{7}{9}$  da  $\frac{3}{2}$ , il resto è  $\frac{5}{18}$  ossia  $\frac{5}{18}$ . Passando alla sottrazione degl'interi dobbiamo tener conto dell'unità prestata, onde 12 non valerà più che 11 da cui sottratto 8, resta 3: sicchè il richiesto residuo è  $3\frac{5}{18}$ .

77. Vediamo come si debbano moltiplicare due frazioni l'una per l'altra, per esempio,  $\frac{2}{3}$  per  $\frac{3}{4}$ : è chiaro che ciò si riduce a prendero

3 volte l'ottava parte di  $\frac{1}{4}$ , incominciamo dunque a vedere qual'è l'ottava parte di  $\frac{1}{4}$ ; essa è  $\frac{1}{32}$ , poichè si è dimostrato nell'art. 57, che una frazione si fa tante volte minore quanto è il numero per cui si moltiplichì il denominatore; dunque l'operazione si è ridotta a prendere 3 volte  $\frac{1}{32}$ , e ciò si ottiene moltiplicando per 3 il numeratore 2, in maniera che la *frazion-prodotto* sarà  $\frac{6}{32}$  ossia  $\frac{3}{16}$ . Quindi si rileva che per moltiplicare due frazioni l'una per l'altra, bisogna moltiplicare numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore.

Se interi uniti a frazioni vogliansi moltiplicare per altri interi uniti a frazioni, converrà prima ridurre gl'interi uniti a frazioni a sole frazioni, indi moltiplicare, come qui innanzi, numeratore per numeratore e denominatore per denominatore. Sia a moltiplicarsi  $7 \frac{1}{2}$  per  $4 \frac{1}{3}$ ; poichè  $7 \frac{1}{2}$  è uguale a  $\frac{14}{2}$ , e  $4 \frac{1}{3}$  è uguale a  $\frac{13}{3}$ , converrà moltiplicare  $\frac{14}{2}$  per  $\frac{13}{3}$ ; cioè a dire bisognerà moltiplicare 28 per 41, e 3 per 9, tal che la *frazion-prodotto* sarà  $\frac{243}{27}$  oppure  $34 \frac{1}{3}$ , estraendone gl'interi.

Se un intero si dee moltiplicare per una frazione, oppure una frazione per un intero, ridurremo l'operazione al caso ordinario sottoscrivendo all'intero l'unità: così dovendosi moltiplicare 5 per  $\frac{1}{2}$ , e  $\frac{1}{2}$  per 9, scriviamo sotto agl'interi l'unità; e si riduce a moltiplicare  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{1}{2}$ , e  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{9}{1}$ ; onde i prodotti saranno  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{9}{2}$ , ovvero  $2 \frac{1}{2}$  e  $7 \frac{1}{4}$ . Dal che si vede, che per moltiplicare un intero per una frazione o una frazione per un

intero, basta moltiplicare per l'intero il solo numeratore della frazione.

Si presentano alle volte delle espressioni sotto questa forma:  $\frac{1}{2}$  di  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{1}{4}$  di  $\frac{1}{2}$  di  $\frac{7}{8}$ ;  $\frac{2}{3}$  di  $\frac{1}{2}$  di  $\frac{5}{6}$  di  $\frac{1}{7}$ . Or queste espressioni, le quali si sogliono chiamare *frazioni di frazioni*, non sono che fattori di una moltiplicazione; onde si ridurranno risolutivamente ad una sola frazione moltiplicando insieme tutti i numeratori, e tutti i denominatori. Così le proposte frazioni di frazioni si riducono a  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{7}{32}$  e  $\frac{5}{21}$  ovvero  $\frac{1}{6}$ , riducendo l'ultima frazione alla sua più semplice espressione.

78. Finalmente passiamo a vedere come si debbano dividere due frazioni l'una per l'altra,  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{1}{4}$ , per esempio: è chiaro che se volessimo dividere  $\frac{1}{2}$  per 5, il quoto esser dovrebbe la quinta parte di  $\frac{1}{2}$ , e perciò  $\frac{1}{10}$ ; poichè si è altre volte avvertito che una frazione si fa tante volte minore quanto è il numero per cui si moltiplica il denominatore: ma volendosi dividere  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{1}{4}$ , cioè per la settima parte di 5, il quoto esser dee 7 volte maggiore di quello che si ottiene dividendo  $\frac{1}{2}$  per 5, cioè un tal quoto esser dee 7 volte  $\frac{1}{10}$ , quindi sarà uguale a  $\frac{7}{10}$  ossia  $1 \frac{7}{10}$ . Dal che si rileva che per dividere due frazioni l'una per l'altra bisogna rovesciare la *frazion-divisore*, facendo passare il numeratore in denominatore ed il denominatore in numeratore, indi si eseguirà la moltiplicazione, e ciò che si ottiene sarà la *frazion-quotiente*.

Così volendosi dividere  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{1}{3}$ , moltiplicheremo  $\frac{1}{2}$  per  $\frac{3}{1}$ ; sarà  $\frac{3}{2}$  la *frazion-quotiente*.

Se interi uniti a frazioni vogliansi dividere per altri interi uniti a frazioni, prima si ridurranno gli uni e gli altri a sole frazioni, indi si farà la divisione come nel caso precedente. Sia  $7 \frac{2}{3}$  a dividersi per  $5 \frac{1}{4}$ , riduciamoli a frazioni, sarà lo stesso che dividere  $\frac{22}{3}$  per  $\frac{21}{4}$ ; quindi per quel che abbiamo detto qui innanzi, moltiplichiamo  $\frac{22}{3}$  per  $\frac{4}{21}$ , avremo  $\frac{88}{63}$  ossia  $1 \frac{25}{63}$ , pel quoziente cercato.

Se finalmente un intero vogliasi dividere per una frazione, o una frazione per un intero, noi ridurremo l'operazione al caso ordinario sottoscrivendo all'intero l'unità. Sia prima a dividersi 7 per  $\frac{2}{3}$ ; scriviamo sotto a 7 l'unità, si riduce a dividere  $\frac{7}{1}$  per  $\frac{2}{3}$ , cioè a moltiplicare  $\frac{7}{1}$  per  $\frac{3}{2}$ ; onde la *frazion-quoziente* sarà  $\frac{21}{2}$  uguale a  $10 \frac{1}{2}$ . Sia in secondo luogo a dividersi  $\frac{4}{5}$  per 3, scriviamo sotto a 3 l'unità, si riduce a dividere  $\frac{4}{5}$  per  $\frac{1}{3}$ , cioè a moltiplicare  $\frac{4}{5}$  per  $\frac{3}{1}$ ; onde la *frazion-quoziente* sarà  $\frac{12}{5}$ . Si rileva da quest'ultimo caso, che per dividere una frazione per un intero, basta moltiplicare per l'intero il solo denominatore della frazione.

### *Dei numeri complessi.*

79. I bisogni delle scienze, delle arti e della società sovente ci obbligano a valutare la quantità di certi oggetti, come sono le monete, i pesi delle merci, il tempo, le distanze ec. Ora per valutare siffatte quantità non vi è altro mezzo che di rapportarle ad un'altra quantità cognita della

medesima natura, e stabilita per unità. Intanto alcune di quelle quantità sono multipli, ed altre summultipli dell'unità suddetta, cioè alcune ne sono il doppio, il triplo, il quadruplo ec., ed altre ne sono la metà, la terza parte, la quarta parte ec.; per la qual cosa le regole finora insegnate pel calcolo de' numeri interi e delle frazioni sarebbero sufficienti a calcolare eziandio queste sorti di quantità. Ma il calcolo delle frazioni riuscendo malagevole specialmente negli usi civili, si è pensato di dividere e suddividere l'unità primitiva in un certo numero di parti uguali, e di considerarle come tante unità di diversa specie. Così la *canna* napoletana si è divisa in 8 parti uguali che si chiamano *palmi*; il palmo si è diviso in 12 parti uguali che si dicono *once*; ed ogni oncia si è suddivisa in 5 parti uguali che si chiamano *minuti*.

Questa considerazione ha richiamato alle quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica il calcolo di questa specie di numeri, i quali si chiamano *denominati* ovvero *complessi*. Ma prima di intraprenderne il calcolo, bisogna sapere quante unità di una specie compongono la unità della specie superiore. Una tal conoscenza è affatto necessaria, e si può apprendere presso quegli autori che hanno scritto de' trattati espressi su i pesi e su le misure.

Noi qui insegneremo l'addizione e la sottrazione de' numeri complessi, non che la moltiplicazione e la divisione de' numeri complessi per numeri incompleksi; riserbando di parlare della moltiplicazione

e divisione de' numeri complessi per altri anche complessi in un appendice posta alla fine del presente volume, nella quale ci distenderemo non poco, perchè il calcolo di questi numeri, come abbiamo detto qui innanzi, fa spesso bisogno negli usi civili.

80. Vediamo prima come si fa l'addizione de' numeri complessi. Sia proposto, per esempio, di sommare i seguenti numeri:

| canne | palmi | once | minuti |
|-------|-------|------|--------|
| 56    | . 6   | . 9  | . 3    |
| 15    | . 5   | . 6  | . 2    |
| 17    | . 4   | . 5  | . 0    |
| 7     | . 0   | . 3  | . 1    |
| <hr/> |       |      |        |
| 76    | . 7   | . 0  | . 1.   |

Incominciando dall' infima specie, cioè dai minuti, troviamo la somma di questi esser 6, vale a dire 1 oncia ed 1 minuto; scriviamo 1 sotto la colonna de' minuti, e riserbiamo 1 oncia per unirla alla somma seguente. Or la somma delle once è 23, che con 1 oncia ritenuta su i minuti fa 24, cioè 2 palmi: notiamo dunque 0 sotto la colonna delle once, e riserbiamo 2 palmi per aggiungerli alla somma de' palmi. Questi aggiunti insieme fanno 13, e fanno 15 unendovi i 2 palmi ritenuti su la somma delle once; poniamo perciò 7 sotto la colonna de' palmi, e riteniamo i rimanenti 8 che costituiscono 1 canna. Finalmente fa d' uopo che alla somma delle canne, la quale è 75, aggiungiamo ancor 1, e con ciò la somma delle

canne risulterà 76. Siechè la somma de' numeri proposti è 76 canne, 7 palmi, ed 1 minuto.

Da ciò si vede che per aggiungere insieme i numeri complessi, bisogna scrivere gli uni sotto gli altri, in modo che quelli della medesima specie sieno nella medesima vertical colonna; indi, incominciando dalla specie infima, sommare secondo l'ordinario i numeri di ciascuna specie, ritenere le unità della specie superiore per unirle alla somma seguente, e notare il resto sotto la specie cui appartiene.

81. Passiamo a vedere come si sottraggano i numeri complessi: noi faremo il calcolo su le *tese*; onde convien sapere preecedentemente che la tesa si compone di 6 *pie*di, ogni piede di 12 *pollici*, ogni pollice di 12 *linee*, ed ogni linea di 12 *punti*. Vogliasi, per esempio, sottrarre.

|    | tese  |   | pie |   | pollici |   | linee |   | punti |
|----|-------|---|-----|---|---------|---|-------|---|-------|
| da | 15    | . | 3   | . | 7       | . | 8     | . | 2     |
|    | 8     | . | 4   | . | 3       | . | 10    | . | 7     |
|    | <hr/> |   |     |   |         |   |       |   |       |
|    | 6     | . | 5   | . | 3       | . | 9     | . | 7.    |

Si vede al primo sguardo che da 2 punti non si possono togliere 7 punti, prendiamo perciò ad prestito dalla cifra 8 una linea, la quale fa 12 punti, e coi 2 punti fa 14 da cui tolto 7, resta 7: notiamo adunque 7 sotto la linea al pesto de' punti. La cifra 8 esprime linee non vale più che 7 linee, da cui non possiamo togliere 10 linee; onde prendiamo ad prestito 1 pol-

lice dalla cifra 7 che significa pollici: siccome un pollice vale 12 linee, queste con le 7 linee faranno 19 linee da cui si potranno togliere 10 linee; il resto è 9, che scriveremo sotto le linee. Or da 6 pollici (essendosi 1 pollice già prestato alle linee) tolti 3 pollici, resta 3: dunque notiamo 3 sotto i pollici. Non potendosi da 3 piedi sottrarre 4 piedi, ricorriamo alle tese dalle quali prendiamo a prestito 1 tesa, cioè 6 piedi: questi 6 piedi, e 3 piedi daranno un totale di 9 piedi, da cui 4 si può sottrarre; il resto è 5, che noi scriveremo sotto la colonna de' piedi. Finalmente togliamo 8 tese da 14 tese, e notiamo il resto 6 sotto la colonna delle tese. Sicchè l'addimandato residuo è 6 tese, 5 piedi, 3 pollici, 9 linee e 7 punti.

Da ciò che si è detto si rileva, che per fare la sottrazione de' numeri complessi, bisogna togliere i numeri inferiori dai numeri superiori della medesima specie, incominciando dalla minima, e notare sotto la linea i resti a misura che si ottengono: se qualche numero inferiore non si può togliere dal corrispondente numero superiore, si prenderà ad imprestito una unità dal numero della specie immediatamente più alta, e tale unità si scioglierà in unità della specie che prende ad imprestito; allora la sottrazione si renderà possibile; ma nel continuare la operazione converrà rammentarsi, che si è diminuito di una unità il numero sul quale si è fatto il prestito.

82. Moltiplichiamo un numero complesso per un numero incompleto: faremo il calcolo su le

*libbre francesi*; onde convien sapere che ogni libbra si compone di 2 *marchi*, il marco di 8 *once*, l'oncia di 8 *grossi*, il grosso di 8 *danari*, il danaro di 24 *grani*.

| lib. | mar. | on. | gros. | dan. | gr. |
|------|------|-----|-------|------|-----|
| 34.  | 1.   | 5.  | 7.    | 4.   | 17. |
|      |      |     |       |      | 9   |
| 315. | 1.   | 5.  | 4.    | 2.   | 9.  |

Moltiplichiamo primieramente 17 grani per 9, avremo per prodotto 153 grani; i quali divisi per 24, per vedere quanti danari in essi contengansi, fanno 6 danari e 9 grani: scriviamo perciò 9 sotto la linea al posto de' grani. Il prodotto di 4 danari per 9 è 36 danari, cui aggiunti i 6 danari ritenuti, risulteranno 42 danari, cioè 5 grossi e 2 danari; onde notiamo 2 sotto il posto de' danari, e serbiamo 5 grossi per unirli al prodotto seguente. Il prodotto di 7 grossi per 9 è 63 grossi, cui conviene aggiungere i 5 grossi posti in serbo, avremo un totale di 68 grossi, cioè 8 once e 4 grossi: scriviamo adunque 4 al posto de' grossi. Moltiplicando 5 once per 9 avremo 45 once, e 53 con le otto once ritenute sul prodotto de' grossi: or 53 once fanno 6 marchi e 5 once; sicchè dobbiamo notare 5 sotto le once, e ritenere 6 marchi per aggiugnerli al prodotto che segue. Moltiplicando 1 marco per 9 si ha 9 marchi, e 15 marchi coll'aggiunta de' 6 marchi riserbati dal prodotto delle once; i quali 15 marchi fanno 7 libbre ed 1 marco: scriviamo adunque 1 sotto

i marchi. Finalmente il prodotto di 34 libbre per 9 è 306 cui conviene aggiungere altre 7 libbre ritenute su i marchi; avremo un totale di 313 libbre, che noteremo al posto di queste sotto la linea. Onde il prodotto richiesto è 313 libbre, 1 marco, 5 once, 4 grossi, 2 danari e 9 grani.

Da ciò è manifesto che per la moltiplicazione di un numero complesso per un numero incompleto, bisogna moltiplicare per l'incompleto il numero di ciascuna specie, incominciando dall'infima, ritenere sopra ogni parzial prodotto le unità della specie più alta per aggiungerle al prodotto che segue, scrivere le rimanenti unità sotto la specie cui appartengono; e notare finalmente il prodotto della massima specie tal quale si è trovato,

83. Ci resta in ultimo luogo a vedere come si divida un numero complesso per un numero incompleto: e poichè il calcolo cadrà su le *lire* di Francia, bisogna avvertire che ogni lira si divide in 20 *soldi*, ed ogni soldo in 12 *danari*.

|            | lire       | sold. | dan. |  | Divis. 24.                    |
|------------|------------|-------|------|--|-------------------------------|
| Dividendo. | 181        | 12    | 6    |  |                               |
|            | 13         |       |      |  | Quoz. 7. 11. 4. $\frac{1}{2}$ |
|            | <u>260</u> |       |      |  |                               |
|            |            | 12    |      |  |                               |
|            | <u>272</u> |       |      |  |                               |
|            |            | 8     |      |  |                               |
|            | <u>96</u>  |       |      |  |                               |
|            |            | 6     |      |  |                               |
|            | <u>102</u> |       |      |  |                               |
| resta....  |            | 6.    |      |  |                               |

Incominciamo a dividere 181 lire per 24, avremo per quoto 7 lire; e sottraendo da 181 lire il prodotto di 7 lire per 24, cioè 168, il resto sarà 13 lire. Moltiplichiamo 13 lire per 20, affin di ridurle in soldi, ed al prodotto 260 uniamo i 12 soldi del dividendo; otterremo 272 soldi. Or dividendo 272 soldi per 24, il quoto è 11 soldi; e sottratto da 272 il prodotto di 11 per 24, cioè 264, il resto è 8 soldi. Moltiplichiamo 8 soldi per 12, affin di ridurre i soldi in danari, ed al prodotto 96 uniamo i 6 danari del dividendo, risulterà un totale di 102 danari. Dividiamo finalmente 102 danari per 24, il quoto sarà 4 danari; sottraiamo da 102 il prodotto di 4 danari per 24, il qual prodotto è 96, il resto sarà 6 danari. Sicchè il quoto richiesto è 7 lire, 11 soldi, 4 danari e  $\frac{6}{24}$  di danaro, ossia  $\frac{1}{4}$  di danaro, riducendo a minimi termini la frazione  $\frac{6}{24}$ ; cioè dividendo per 6 tanto il numeratore quanto il denominatore.

Da ciò chiaramente si scorge, che per dividere un numero complesso per un altro incompleto, bisogna incominciare l'operazione dal numero della più alta specie, acciocchè il resto si possa sciorre in unità della specie inferiore, le quali con le unità che sono nel dividendo proposto, costituiranno il secondo dividendo; e così bisogna continuare sino al numero della specie infima. I parziali quozienti di ciascuna specie scritti l'uno dopo l'altro, da sinistra a destra, sotto la linea del divisore, formeranno il quoto addimandato.

*Delle frazioni decimali.*

84. Abbiamo osservato nel capitolo precedente che la difficoltà di calcòlare le frazioni ha fatto inventare i numeri complessi , cioè quelli in cui l'unità primitiva si è divisa e suddivisa in un certo numero di parti uguali , che debbonsi considerare come tante unità di diversa specie : ond'è che per siffatti numeri , almeno per le unità della specie medesima , si sono adottate le medesime regole di calcolo che anteriormente abbiamo stabilite pei numeri incomplessi. Ma però restava una difficoltà nel calcolo de' numeri complessi , ed era quella di dover conoscere quante unità di una specie costituivano una unità della specie superiore ; ciò che non è di lieve momento , se vogliasi riflettere alla varietà di pesi e di misure che sono in uso non solo presso i diversi popoli , ma sovente presso una medesima nazione. Questa difficoltà non avrà più luogo nelle *frazioni decimali* , delle quali intendiamo trattare.

85. Per farsi una idea chiara di queste frazioni , bisogna concepire la unità divisa in dieci parti uguali , ciascuna delle quali si dirà *parte decima* ; indi concepire una parte decima suddivisa in dieci altre parti uguali ; ciascuna delle quali si dirà *parte centesima* per rispetto alla unità ; similmente considerare una parte centesima risolta in dieci parti uguali , ciascuna delle quali si dirà *parte millesima* relativamente

alla unità; e così in appresso. Quindi le seguenti espressioni  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{7}{100}$ ,  $\frac{9}{1000}$ ,  $\frac{6}{10000}$ , ec. sono frazioni decimali, dove si vede che il denominatore è sempre la unità seguita da zeri.

86. Da ciò ne segue: 1.<sup>o</sup> che giustamente queste frazioni si sono chiamate decimali, perchè una è decima parte dell'altra: così la millesima è parte decima della centesima, e la centesima è parte decima della decima, ec.; 2.<sup>o</sup> che tali frazioni si possono dire decimali di diverso ordine: come la diecimillesima sarebbe un decimale di un ordine inferiore alle millesime, e la millesima sarebbe un decimale di un ordine inferiore alle centesime, ec.; 3.<sup>o</sup> che le frazioni decimali hanno la stessa legge di successione che i numeri interi; poichè siccome facendo l'unità continuamente decupla, si son formate le decine, le centinaia, le migliaia, ec., così rendendo la unità di dieci in dieci volte minore, si formano le decime, le centesime, le millesime ec.; 4.<sup>o</sup> finalmente che le medesime regole che abbiamo insegnate pel calcolo de' numeri interi, potranno servire a calcolare le frazioni decimali.

87. Passiamo a vedere come si debbano scrivere ed enunciare i decimali. Diciamo in primo luogo potersi scrivere i decimali come numeri interi, cioè senza denominatori, distinguendoli però dagl'interi per mezzo di una virgola, e se mai manchino le decime, le centesime, le millesime parti ec., si suppliranno queste mancanze coi zeri. Così volendo scrivere 64 interi, 3 decimi, 7 centesimi, 8 millesimi, scriveremo

64, 578; dal quale esempio si può rilevare che la cifra che viene immediatamente dopo la virgola, procedendo da sinistra a destra, denota parti decime; la cifra che segue indica parti centesime, e la terza parti millesime.

Similmente, dovendo scrivere 57 interi e 9 diecimillesimi, non vi sarebbe alcuna difficoltà, volendo far uso del denominatore; perciocchè l'anzidetto numero si scriverebbe in questo modo  $57 \frac{9}{10000}$ : ma dovendolo scrivere senza il denominatore, bisognerà dopo la virgola porre tre zeri per indicare la mancanza delle decime, delle centesime e delle millesime, indi scrivere 9 al quarto posto, che è quello delle diecimillesime; onde l'enunciato numero si scriverà come segue: 57, 0009.

88. Non si durerà fatica, dopo ciò che abbiamo detto, a comprendere come si debba enunciare un numero che contenga decimali. Per esempio, vogliasi enunciare 387, 5295 in cui le cifre 387 indicano numeri interi. Poichè la cifra 5 che viene immediatamente dopo la virgola, indica parti decime, la cifra 2 parti centesime, la cifra 9 parti millesime, e l'ultima cifra 5 parti diecimillesime, il numero anziscritto si potrebbe enunciare: trecento ottantasette unità, cinque decimi, due centesimi, nove millesimi o tre diecimillesimi. Ma considerando che  $\frac{5}{10}$  è lo stesso che  $\frac{50}{100}$  ovvero  $\frac{500}{1000}$  ovvero  $\frac{5000}{10000}$ , (come ognuno si persuaderà, riflettendo che non si fa che moltiplicare continuamente per 10 tanto il numeratore quanto il denominatore); che  $\frac{5}{10}$  è lo stesso

che  $\frac{3}{1000}$  oppure  $\frac{3}{1000}$ ; e che finalmente  $\frac{3}{1000}$  è lo stesso che  $\frac{3}{1000}$ ; il numero indicato si leggerà in una maniera più breve e più comoda dicendo: trecento ottantasette interi, cinque mila dugento novantatré *diecimillesimi*.

Sicchè bisogna scrivere ed enunciare le frazioni decimali come i numeri interi, dai quali la virgola li distingue, e sottintendere un denominatore che abbia oltre la unità tanti zeri quante sono le cifre decimali.

89. Se in vece di scrivere per esempio 0, 7 ossia  $\frac{7}{10}$ , si scrivesse 0, 70 ossia  $\frac{70}{100}$ , il valore della frazione decimale sarebbe il medesimo, poichè non si è fatto che moltiplicare per 10 tanto il numeratore quanto il denominatore. Similmente, in vece di scrivere 0, 70 ovvero  $\frac{70}{100}$ , si potrebbe scrivere 0, 700 ovvero  $\frac{700}{1000}$ , conciossiachè non si farebbe che moltiplicare anche per 10 sì il numeratore che il denominatore di quest' ultima frazione. Il medesimo discorso potendosi applicare a 0, 7000; 0, 70000; 0, 700000 ec., ne segue che non si muta il valore di una frazione decimale, se alla destra di essa si aggiunga oppur si tolga un qualunque numero di zeri.

90. L' ultima osservazione che ci resta a fare su i decimali, è che rimuovendo la virgola, secondo che la si avvanzi verso la dritta o verso la sinistra, il numero contenente decimali, per ogni posto che la virgola procede, si farà dieci volte maggiore o dieci volte minore. La qual cosa è evidentissima, perchè ogni cifra del nu-

mero trovasi moltiplicata o divisa, per un posto, per 10; per due posti, per 100; per tre posti, per 1000; ec. Così 368, 23 è 10 volte 36, 823; è 100 volte 3, 6823; ed è 1000 volte 0, 36823. Ma 58, 756 è 10 volte minore che 587, 56; è 100 volte minore che 5873, 6; ed è 1000 volte minore di 58736.

*Del calcolo de' decimali.*

91. Applichiamo le suddette generali nozioni, e vediamo in prima come si aggiungano insieme molte quantità decimali.

I numeri decimali essendo tali, per loro natura, che andando da destra a sinistra, dieci unità di un ordine valgono una unità dell'ordine immediatamente superiore, ne segue che la regola di aggiungere insieme i numeri decimali non dee differire da quella che si è da noi tenuta per aggiungere insieme i numeri interi. Intanto potrebbero i numeri decimali non avere il medesimo numero di cifre, allora, per evitare l'imbarazzo che potrebbe aver luogo nel disporre, le une sotto le altre, le unità della medesima specie, suole aggiungersi differenti zeri alla destra de' decimali onde far che in tutti sia il medesimo numero di cifre: ma sarà più breve di disporli in modo che le virgole siano in una medesima colonna verticale, poichè ciò sarà sufficiente a dare a ciascuna cifra il posto convenevole.

Eccone gli esempi.

|          |            |
|----------|------------|
| 87, 567  | 533, 2738  |
| 34, 873  | 389, 324   |
| 5, 248   | 78, 92     |
| 6, 469   | 23, 3      |
| <hr/>    | <hr/>      |
| 134, 157 | 1024, 8178 |

$$\begin{array}{r}
 73, 367 \\
 12, 026 \\
 58, 003 \\
 7, 4 \\
 \hline
 150, 796
 \end{array}$$

92. Da ciò che si è detto per l'addizione de' decimali, si rileva facilmente che la regola della sottrazione di essi non dee differire da quella de' numeri interi. Ecco pertanto alcuni esempi per esercizio de' principianti.

|            |            |
|------------|------------|
| 755, 72431 | 54, 327852 |
| 642, 28749 | 13, 8795   |
| <hr/>      | <hr/>      |
| 93, 43682  | 40, 448352 |

$$\begin{array}{r}
 23, 00667 \\
 12, 76392 \\
 \hline
 10, 24275
 \end{array}$$

93. Passiamo a vedere come si esegua la moltiplicazione su i decimali, o che essi siano uniti ad interi, o che non siano che soli decimali.

Si potrebbero scrivere i denominatori sotto le cifre decimali, cioè convertirle in frazioni ordinarie, e se ne otterrebbe il prodotto eseguendo la moltiplicazione secondo la maniera che nelle frazioni ordinarie si è diggià insegnato: ma l'ultima considerazione fatta su i decimali renderà molto più semplice l'operazione di cui si tratta. Vogliasi, per esempio, moltiplicare  $38,724$  per  $8$ ; consideriamo tutte le cifre del moltiplicando come esprimenti intere unità, e senza curar la virgola, moltiplichiamo  $38724$  per  $8$ , avremo per prodotto  $309792$ : ma la suppressione della virgola ha reso il moltiplicando mille volte maggiore, quindi anche il prodotto  $309792$  è mille volte maggiore di quello che da noi si cercava; per la qual cosa otterremo quest'ultimo prodotto dividendo  $309792$  per  $1000$ , lo che si farà separando verso la dritta tre cifre decimali, quante appunto ne contiene il moltiplicando; onde si avrà  $309,792$ , pel prodotto richiesto.

Questo ragionamento potendosi adattare a tutti gli altri casi consimili, ne segue: che dovendosi moltiplicare per un numero intero un numero contenente decimali, bisogna considerar questo come un numero intero, indi far la moltiplicazione secondo la regola dell'art. 33, e finalmente separare su la dritta del prodotto tante cifre decimali, quante ne contiene il moltiplicando.

94. Se debbansi moltiplicare l'un per l'altro due numeri contenenti decimali, per esempio,  $27,564$  per  $9,23$ ; sopprimiamo in ambidue la virgola; dovremo moltiplicare  $27564$  per  $923$ , il

prodotto de' quali è 80636972. Ma la soppressione della virgola ha reso il moltiplicando mille volte maggiore, ed il moltiplicatore cento volte maggiore: onde il prodotto da noi ottenuto è centomila volte maggiore di quello che si cercava. Adunque per ottenere il vero prodotto converrà dividere 80636972 per 100000, lo che si farà separando verso la dritta cinque cifre decimali, vale a dire quante sono le cifre decimali in tutti due i fattori.

Il medesimo discorso potendo aver luogo in tutti gli altri casi analoghi, si può generalmente concludere: che per moltiplicare l'un per l'altro due numeri contenenti decimali, bisogna considerarli come numeri interi, e fatta la moltiplicazione secondo la regola dell'art. 33, separare verso la dritta del prodotto tante cifre decimali, quante ne contengono il moltiplicando ed il moltiplicatore.

Soggiungiamo anche qui degli esempi, acciocchè i principianti si possano esercitare.

$$\begin{array}{r}
 875, 4956 \\
 \underline{85, 27} \\
 61144552 \\
 17469872 \\
 26204808 \\
 69879438 \\
 \hline
 72735,812072
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 925, 47283 \\
 \underline{5, 427} \\
 646430981 \\
 184694566 \\
 569389152 \\
 277041849 \\
 \hline
 3164,74158841
 \end{array}$$

95. Vediamo finalmente come si dividano i decimali, o essi siano uniti ai numeri interi, o siano solamente decimali.

Potrebbe 1.° il dividendo contenere decimali, e'l divisore essere un numero intero; 2.° potrebbe il dividendo essere un numero intero, e'l divisore contener decimali; 3.° finalmente potrebbe stare che il dividendo e'l divisore contenessero de' decimali. Esamineremo tutti questi casi.

Ma prima di passar oltre, rammentiamoci che se il dividendo o il divisore si moltiplichi per un numero qualunque, anche il quoziente diverrà per lo stesso numero di volte più grande o più piccolo: e che se si moltiplichi pel medesimo numero sì il dividendo che il divisore, il quoziente non cangerà valore.

96. 1.° Proponiamoci di dividere un numero contenente decimali per un numero intero, per esempio, 425, 573 per 13. Senza considerar la virgola, si divida 425573 per 13; il quoto sarà 32721. Ma la suppressione della virgola ha reso il dividendo mille volte più grande, e per conseguenza mille volte più grande anche il quoziente: adunque per ottenere il giusto valore converrà dividere 32721 per 1000, lo che si farà separando su la dritta tre cifre decimali, vale a dire quante ne contiene il dividendo: con ciò si avrà 32, 721 pel quoto richiesto.

Quindi si può generalmente dedurre: che nel dividere per un numero intero un numero contenente decimali, bisogna considerare tutte le cifre di questo come esprimenti unità intere; e

senza badare alla virgola, fatta la divisione, secondo la regola ordinaria dell' articolo 49, separare su la dritta del quoto tante cifre decimali quante ne contiene il dividendo.

Se mai il quoziente non avesse un numero sufficiente di cifre per separar quelle che son prescritte dalla regola, si supplirebbe per mezzo de' zeri posti alla sinistra di esso quoziente. Così volendosi dividere  $0,001752$  per  $24$ , si dividerà  $1752$  per  $24$ , e si avrà per quoto  $73$ : ma per la suppressione della virgola  $1752$  è un milione di volte maggiore che  $0,001752$ ; quindi anche il quoto  $73$  è un milione di volte maggiore di quello che si cerca. Onde si otterrà quest'ultimo quoto dividendo  $73$  per  $1000000$ ; cioè il quoto che si dimanda, sarà  $0,000073$ .

97. 2.° Sia da dividersi un numero intero per un altro che contenga decimali, a cagion di esempio,  $8832$  per  $3,68$ ; si supprima in questo la virgola, e si divida  $8832$  per  $368$ ; si avrà per quoto  $24$ . Ma per la suppressione della virgola il divisore è divenuto cento volte più grande, e quindi il quoto cento volte più picciolo: adunque per ridurlo al giusto valore converrà moltiplicare  $24$  per  $100$ , lo che si farà aggiungendo alla destra di  $24$  due zeri, cioè quante sono le cifre decimali del divisore; onde il quoto ricercato sarà  $2400$ .

Da ciò si può inferire che dovendosi dividere un numero intero per un altro che contenga decimali, bisogna considerare tutte le cifre di questo come esprimenti unità intere, e fatta la

divisione secondo la regola ordinaria, aggiugnere alla destra del quoto tanti zeri quante sono le cifre decimali che contiene il divisore.

98. 3.<sup>a</sup> Finalmente sia proposto di dividere l'un per l'altro due numeri contenenti decimali, in grazia di esempio, 121, 80423 per 3, 27. Si considerino il dividendo ed il divisore come esprimimenti unità intere, e senza porre bada alla virgola, si divida 12180423 per 327; si avrà per quoto 37249. Ma per la suppressione della virgola il dividendo si è reso centomila volte maggiore, e l divisore cento volte maggiore: adunque il quoziente da noi ottenuto è centomila volte maggiore, e cento volte minore di quello che si cerca: in una parola, è mille volte più grande. Onde per ridurlo al giusto valore, converrà dividere 37249 per 1000, lo che si farà separando sulla dritta tre cifre decimali, cioè quante sono le cifre decimali che il dividendo ha più del divisore.

È chiaro che se il dividendo ed il divisore hanno il medesimo numero di cifre, la divisione si farà secondo la regola ordinaria dell' articolo 49, e l quoto esprimerà unità intere.

Ma potrebbe stare che il divisore avesse più cifre decimali del dividendo, allora, fatta la divisione come se l'uno e l'altro esprimessero numeri interi, converrà aggiugnere alla dritta del quoto tanti zeri quante sono le cifre decimali che il divisore ha più del dividendo. Ed in vero, volendosi dividere 409, 6 per 0, 0034; la suppressione della virgola renderà il dividendo dieci volte più grande, e l divisore diecimila vol-

te più grande : onde il quoto 128 che si ottiene col dividere 4096 per 32, sarà mille volte più picciolo di quello che si cerca. Per la qual cosa converrà moltiplicare 128 per 1000, lo che si farà aggiungendo alla destra di 128 tre zeri, cioè quante sono le cifre decimali che il divisore ha più del dividendo ; tal che si avrà 128000 pel quoto richiesto.

99. Del resto, per seguire il medesimo andamento da noi tenuto nella moltiplicazione, abbiamo distinto nella divisione de' decimali tanti casi particolari; ma però tutti si possono restringere nella seguente regola generale. Sia proposto di dividere 57, 924 per 8, 7; il divisore sarà lo stesso se alla dritta aggiugniamo due zeri, dimodochè esso diverrà 8, 700. Ora è chiaro da quanto si è detto di sopra, che dopo questa preparazione si potrà supprimere la virgola, e senza alterare il quoto, dividere 57924 per 8700; imperciocchè altro non si farà che rendere mille volte maggiore tanto il dividendo quanto il divisore. Quindi il quoto ricercato sarà 4 unità e  $\frac{1114}{8700}$

Da ciò si può inferire, che dovendosi dividere l'un per l'altro due numeri contenenti cifre decimali, bisogna aggiugnere alla dritta di quello che ne ha di meno tanti zeri quanti sono necessarii, onde il numero delle cifre decimali riesca in tutti due lo stesso, indi, suppressa la virgola, si farà la divisione secondo la regola ordinaria de' numeri interi.

100. Per non implicar la regola, in tutti gli esempli di divisione che ci abbiamo proposti ne-

gli articoli precedenti, se l'ultimo se ne eccettui, l'operazione è riuscita senza resto; ma questo caso non è certamente il più ordinario. Ond' è che quando vi è un resto, converrà dare ad esso la forma frazionaria, come nell' articolo prec. si è praticato: ma siccome nelle decimali ci proponiamo di fuggire le frazioni ordinarie, così si muterà il resto in decimali, cioè a dire in decime, centesime, millesime ec. ciocchè per altro si può fare aggiugnendo alla dritta del dividendo quanti zeri si vorrà, e facendo la divisione secondo la regola de' numeri interi. Il quoto, su la dritta del quale si sono separate tante cifre decimali quante il dividendo ne ha di più del divisore, se non sarà esatto, si potrà almeno rendere così prossimo al vero che ne piacerà. Proponiamoci a dividere in grazia di esempio 837, 932 per 36.

$$\begin{array}{r}
 873, 932/00 \left\{ \begin{array}{r} 36 \\ \hline 24, 27588 \end{array} \right. \\
 \underline{72} \\
 153 \\
 \underline{144} \\
 99 \\
 \underline{72} \\
 273 \\
 \underline{252} \\
 212 \\
 \underline{180} \\
 320 \\
 \underline{288} \\
 320 \\
 \underline{288} \\
 32.
 \end{array}$$

Si è approssimato il quoto sino alle parti centomillesime ; e si potrebbe approssimare sempre più aggiungendo altri zeri alla dritta del dividendo, e continuando la divisione.

101. Non solo quando il dividendo contiene de' decimali, il quoziente si può approssimare tanto che si vorrà, ma eziandio quando il quoziente si ottiene dal dividere un numero intero per un altro intero. Imperciocchè si continuerà la divisione riducendo il resto in decime, centesime, millesime ec.: o ciò che è lo stesso, aggiugnendo alla destra del dividendo tanti zeri quanti se ne stimeranno necessarij, avendo però la precauzione di separarli da questo per mezzo di una virgola. Il presente esempio mostra che il quoziente di 7825 per 27 si è approssimato sino alle parti millesime.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividendo....} 7825,000 \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisore...} 27 \\ \hline 289,814 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r}
 54 \\
 \hline
 242 \\
 216 \\
 \hline
 265 \\
 243 \\
 \hline
 220 \\
 216 \\
 \hline
 40 \\
 7 \\
 \hline
 130 \\
 108 \\
 \hline
 22.
 \end{array}
 \end{array}$$

Qui giova di avvertire, che se l'operazione si continuasse, aggiugnendo cioè un altro zero al dividendo, la cifra delle *diecimillesime* sarebbe 8: onde per diminuire l'errore, per quanto è possibile, qualora ci vogliamo arrestare alle millesime, bisogna prendere 289, 815 in vece di 289, 814. In generale, nelle approssimazioni decimali, per diminuire l'errore, si accrescerà l'ultima cifra di una unità, se la cifra che segue sorpassi 4.

102. Non essendo le frazioni che divisioni indicate, è manifesto che bisogna regolarsi della maniera qui sopra esposta per convertire le frazioni ordinarie in frazioni decimali. Così  $\frac{1}{3}$  si riduce a 0, 375: come dall'operazione figurata che segue, ognun può intendere.

$$\begin{array}{r} 3,000 \\ 24 \overline{) \phantom{000}} \\ \underline{60} \phantom{00} \\ 56 \phantom{00} \\ \underline{40} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{00} \phantom{00} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 8 \\ 0,375 \end{array} \right.$$

103. Vogliasi ancora ridurre in frazion decimale  $\frac{1}{27}$ . Dopo avere scritto alla destra di 4 quanti zeri si stimeranno necessari, si faccia la divisione per 27. Eccone l'operazione a disteso.

$$\begin{array}{r}
 4,000000 \\
 \underline{27} \\
 130 \\
 \underline{108} \\
 220 \\
 \underline{216} \\
 40 \\
 \underline{27} \\
 130 \\
 \underline{108} \\
 220 \\
 \underline{216} \\
 4
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{r}
 27 \\
 \hline
 0,148148
 \end{array}
 \right.$$

104. In questo esempio non si otterrà mai un quoto esatto; per quanto si voglia spingere la divisione: la frazion dunque  $\frac{4}{27}$  non si può esprimere come la precedente  $\frac{1}{3}$  con un esatto numero decimale. Per comprendere onde deriva questa circostanza, fa d' uopo riflettere, che, aggiugnendo dei zeri al numeratore, altro non si fa che moltiplicarlo per 10, per 100, ec: onde si potranno convertire in esatte decimali solamente quelle frazioni ordinarie, i denominatori delle quali sono divisori di 10, 100 1000 ..... Ma i numeri 100, 1000, 10000 ..... non sono che i prodotti di 10 moltiplicato di seguito per se stesso; ed i divisori di 10 sono

2 e 5. Dunque si potranno esprimere con un esatto numero decimale solamente quelle frazioni ordinarie, che hanno per denominatore 2, oppure 5, oppure i numeri che si formerebbero moltiplicando i suddetti di seguito per essi medesimi. Tal è il caso della frazione  $\frac{1}{8}$ , il cui denominatore 8 è uguale a 2 moltiplicato per 2 e per 2.

105. Sebbene le frazioni che non soddisfanno a questa condizione, non si possano ridurre esattamente in decimali, pure le cifre del quoziente, dopo un certo periodo, ritornano col medesimo ordine: lo che dee necessariamente avvenire, perchè ciascuno de' resti successivi essendo minore del divisore, non vi sarà che un numero determinato di resti differenti. Quindi subito che si otterrà un medesimo resto, le cifre del quoto ritorneranno col medesimo ordine che si erano da prima presentate: così nel ridurre in frazion decimale  $\frac{4}{27}$ , le cifre 1, 4, 8 ritorneranno costantemente. Per tale proprietà queste specie di frazioni si son chiamate *periodiche*.

Nelle approssimazioni ciò riesce oltremodo vantaggioso; perciocchè non fa più bisogno di continuare la divisione, ma basta di ripetere tutte le volte che si vorrà le cifre del periodo una volta conosciuto. Per esempio, sapendo che le cifre che costituiscono il periodo nella divisione di 4 per 27, sono 1, 4 e 8; si dirà che il valore di  $\frac{4}{27}$  è 0, 14814, qualora si voglia approssimare a meno di  $\frac{1}{100000}$ ; che è 0, 148148, se vogliasi approssimare a meno di  $\frac{1}{1000000}$ ; che

è  $0,14814814$ , volendosi approssimare a meno di  $\frac{1}{1000000}$ ; ec.

106. Si può passare dalle frazioni periodiche alle frazioni ordinarie, da cui quelle risultano, ma convien fare le seguenti osservazioni.

Se vuolsi ridurre in numeri decimali le frazioni  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{99}$ ,  $\frac{1}{999}$  ec. si otterranno le frazioni  $0,111111$  ....  $0,010101$  ....  $0,001001001$  .... ed in generale, ogni frazione che ha per numeratore l'unità e per denominatore un numero le cui cifre sono tutte 9, si svolgerà in una frazione decimale di cui il periodo è l'unità, preceduta da tanti zeri quanti sono i 9 del denominatore, uno di meno.

Quindi la frazion periodica  $0,66666$  .... si può considerare come il prodotto di 6 per  $0,11111$  ....; onde  $0,66666$  .... è uguale a 6 moltiplicato per  $\frac{1}{9}$ , cioè a  $\frac{6}{9}$  ossia  $\frac{2}{3}$ .

Similmente la frazion periodica  $0,636363$  .... si può considerare come il prodotto di 63 per  $0,010101$  ....; che però  $0,636363$  .... è uguale a 63 moltiplicato per  $\frac{1}{99}$ , vale a dire a  $\frac{63}{99}$  ossia  $\frac{7}{11}$ , dividendo per 9 sì il numeratore che il denominatore.

Non altrimenti la frazion periodica  $0,537537$  .... sarà uguale a 537 moltiplicato per  $0,001001$  .... uguale cioè a 537 moltiplicato per  $\frac{1}{999}$ , il qual prodotto è  $\frac{537}{999}$  ossia  $\frac{179}{333}$ .

In generale, per ripassare dalle frazioni periodiche alle frazioni ordinarie di cui esse sono lo sviluppo, bisogna dividere il periodo pel numero espresso da tante volte la cifra 9 quante sono le cifre di esso periodo.

107. Si può ripassare alla frazione ordinaria anche quando il periodo non incomincia dalla virgola. Sia proposto  $0,375454\dots$  in cui il periodo principia alla terza decimale; facendo astrazione da  $0,37$ ; la frazione periodica  $\dots 545454\dots$  sarà uguale a  $\frac{54}{99}$ ; onde  $0,375454\dots$  sarà  $0,37\frac{54}{99}$ , badando però che la frazione  $\frac{54}{99}$  essendo riferita alle centesime, sarà  $\frac{54}{9900}$ . Sicchè la proposta decimale  $0,37545454\dots$  sarà uguale a  $\frac{37}{100}$  più  $\frac{54}{9900}$ ; la somma delle quali frazioni è  $\frac{3700}{9900}$  ossia  $\frac{37}{99}$ , dividendo per 9 tanto il numeratore quanto il denominatore.

*Della formazione de' quadrati.*

108. Il prodotto di un numero moltiplicato più volte di seguito per esso medesimo, si dice generalmente *potenza*. Ma se il numero si moltiplichi una volta per esso medesimo, ciò che risulta si chiama il *quadrato* di esso numero; se poi si moltiplichi per esso medesimo due volte di seguito, ciò che risulta si chiama il *cubo* di esso numero. Le altre potenze si sogliono disegnare dal numero de' fattori uguali che si sono moltiplicati tra loro; dicendosi *potenza quarta* il prodotto di quattro fattori uguali; *potenza quinta*, il prodotto di cinque fattori uguali; ec. Noi ci contenteremo di esporre in questi elementi un metodo onde inalzare un numero a quadrato e a cubo, potendosi comodamente rimettere all'Algebra la formazione delle potenze superiori.

109. Siccome per inalzare speditamente a quadrato un numero composto, fa d'uopo che si sappiano a memoria i quadrati de' numeri semplici, eceoli qui espressi sotto i numeri di cui essi sono rispettivamente i quadrati:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.  
 Quadrati 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

110. Se bisognasse fare il quadrato di un numero terminato da zeri, di 300, per esempio; converrebbe moltiplicare 300 per 300, lo che si farà moltiplicando 3 per 3, ed aggiugnendo al prodotto 9 quattro zeri ( V. art. 38. ), cioè il doppio di quelli che ne ha 300, dimodochè il richiesto quadrato sarebbe 90000. Quindi si può generalmente inferire, che quando un numero è terminato da zeri, se ne otterrà il quadrato facendo solamente il quadrato delle cifre significative, ed aggiungendo alla destra due volte tanti zeri quanti ne ha il numero che si vuole elevare a quadrato. Per lo che se a 169, che è il quadrato di 13, si aggiungano 6 zeri sulla dritta, si avrà 169000000 pel quadrato di 13000.

111. Inoltre essendo il quadrato di un numero, per esempio, di 7, uguale a 7 ripetuto 7 volte, se intendasi 7 diviso nelle parti 4 e 3, il quadrato di 7 sarà lo stesso che la somma de' prodotti di 4 per 7, e di 3 per 7: ma il prodotto di 4 per 7 equivale alla somma de' prodotti di 4 per 4, e di 4 per 3; ed il prodotto di 3 per 7 equivale alla somma de' prodotti di

4 per 5, e di 3 per 3: dunque il quadrato di 7 parggerà la somma de' seguenti prodotti:

4 per 4, 4 per 3, 4 per 3, 3 per 3.

Dove chiaramente si vede che i prodotti estremi sono i rispettivi quadrati di 4 e di 5, ed i prodotti di mezzo fanno il doppio del prodotto di 4 per 3. Laonde il quadrato di un numero qualunque si compone dai quadrati delle parti, accresciuti del doppio del lor prodotto.

112. Premesse queste cose, passiamo a vedere 1.<sup>o</sup> come si formi il quadrato di un numero composto; 2.<sup>o</sup> qual ne sia la disposizione delle parti. Sia prima da elevarsi a quadrato un numero di due cifre, per esempio, 37; esso si divida ne' valori 30 più 7: il quadrato di 37 si avrà unendo in una somma il quadrato di 30, il doppio del prodotto di 30 per 7, ed il quadrato di 7, aggiugnendo cioè insieme i seguenti numeri:

$$\begin{array}{r} 900 \\ 420 \\ \underline{49} \\ 1369 \end{array}$$

Si scorge dalla semplice ispezione di questo calcolo, che cancellando gli zeri che sono alla destra de' numeri, la somma non si altera affatto: onde il quadrato di 37 si potrà indicare come qui sotto.

$$\begin{array}{r}
 9 \\
 42 \\
 49 \\
 \hline
 1369.
 \end{array}$$

Vale a dire, il quadrato di 57 si ottiene facendo la somma del quadrato di 3, del doppio di 3 moltiplicato per 7, e del quadrato di 7, scritti però in maniera questi numeri, che ciascuno superi il precedente di un posto verso la dritta.

Inoltre, sia da elevarsi a quadrato un numero composto di tre cifre, per esempio, 374. Si divida parimente nelle parti 370 più 4; si otterrà il quadrato facendo la somma del quadrato di 370, del doppio del prodotto di 370 moltiplicato per 4, e del quadrato di 4, come qui appresso si può vedere:

$$\begin{array}{r}
 136900 \\
 2960. \\
 16 \\
 \hline
 159876.
 \end{array}$$

Ora potendosi considerare il numero 370 diviso nelle parti 300 più 70; il quadrato di 370, che qui sopra si è trovato uguale a 136900, si potrà avere unendo in una somma il quadrato di 300, il doppio di 300 moltiplicato per 70, ed il quadrato di 70. Onde fatte queste sostitu-

( 119.)

zioni; il quadrato di 374 si potrà esprimere nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} 90000 \\ 42000 \\ 4900 \\ 2960 \\ 16 \\ \hline 139376. \end{array}$$

Siccome cancellando gli zeri che sono alla destra di questi numeri, la somma non varia, si potrà indicare il quadrato di 374 in quest'altra maniera:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 42 \\ 49 \\ 296 \\ 16 \\ \hline 139376. \end{array}$$

Cioè unendo insieme il quadrato di 3, il doppio del prodotto di 3 per 7, il quadrato di 7, il doppio del prodotto di 37 per 4 ed il quadrato di 4, scritti tutti questi numeri in modo che ciascuno superi il precedente di un luogo sulla dritta.

Il medesimo discorso potendosi adattare ai numeri composti da più cifre, si può generalmen-

te conchiudere: che per fare il quadrato di un numero qualunque, bisogna aggiugnere in una somma il quadrato della prima cifra, il doppio del prodotto della prima cifra per la seconda, il quadrato della seconda, il doppio del prodotto delle due prime cifre per la terza, il quadrato della terza, il doppio del prodotto delle prime tre cifre per la quarta, il quadrato della quarta, ec.; scritti tutti questi numeri in maniera che ciascuno superi il precedente di un posto a manritta.

113. Per conoscere la disposizione delle parti onde si compone il quadrato di un numero, conviene riflettere, che essendo 100 il quadrato di 10, il quadrato di un numero di una cifra non potrà contenere più di due cifre. Similmente, essendo 10000 il quadrato di 100, il quadrato di un numero di due cifre non potrà contenere più di quattro cifre. In generale, il quadrato di un numero espresso da quante cifre si vogliauo, non conterrà mai più del doppio delle cifre delle quali esso numero è composto. Per la qual cosa, se il quadrato di un numero si divida da destra a sinistra in caselle, ognuna composta di due cifre, all' infuori della prima casella sulla sinistra che potrà delle volte avere una cifra sola, queste caselle saranno tante quante le cifre del numero che si è inalzato a quadrato.

Oltracciò, richiamando ad esame il quadrato di 57, che si è trovato qui innanzi essere 3249, osserveremo primieramente che il quadrato delle

decine, cioè di 30, che è 900 non ha cifre significative di un ordine inferiore alle centinaia; perciò esso quadrato dee contenersi nelle 13 centinaia del numero 1369. Sottratto adunque il quadrato delle decine, vale a dire 900 da 1368, avremo per resto 469. Considerando in secondo luogo che il doppio del prodotto delle decine per le unità non ha cifre di un ordine inferiore alle decine, chiaramente si scorge che il doppio del prodotto di 30 per 7, cioè 420, dee contenersi nelle 46 decine del resto 469; onde fatta la sottrazione, resterà 49.

Finalmente in questo residuo dee contenersi il quadrato della cifra 7, come l'è chiaro, essendo 49 il quadrato di 7.

Il medesimo ragionamento potendosi applicare ad un quadrato espresso da qualsivoglia numero di cifre, inferiremo generalmente: che nella prima casella a sinistra si contiene il quadrato della prima cifra del numero; che ne' rispettivi residui con le cifre che sono alla sinistra delle virgole, si contengono i quadrati delle altre cifre del numero; e che ne' rispettivi residui insieme colle cifre che sono alla destra delle virgole, si contengono i doppii de' prodotti fatti dalla prima cifra nella seconda, dalle due prime nella terza, dalle tre prime nella quarta, ec.

114. Siccome la disposizione delle parti di un quadrato dee ben comprendersi, acciocchè, il quadrato essendo dato, si sappia ritrovare il numero di cui esso è quadrato; così proponiamo qui sotto il quadrato di 2458 colle dovute divisioni

in caselle, affinchè i giovani si esercitino a sottrarre nel modo surriferito i quadrati ed i doppi prodotti.

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 16 \\
 16 \\
 144 \\
 9 \\
 5888 \\
 64 \\
 \hline
 5,94,38,44.
 \end{array}$$

115. Per fare il quadrato di una frazione converrebbe moltiplicare la frazione per se stessa ( 108 ); ma il prodotto delle frazioni si ottiene moltiplicando il numeratore pel numeratore, ed il denominatore pel denominatore: dunque per avere il quadrato di una frazione bisogna fare separatamente il quadrato del numeratore, e quello del denominatore. Quindi il quadrato di  $\frac{1}{4}$  sarà  $\frac{1}{16}$ ; quello di  $\frac{1}{16}$  sarà  $\frac{1}{256}$ .

116. Se bisognasse innalzare a quadrato un intero unito a frazione, si ridurrà prima l'intero colla frazione ad una sola frazione ( 75. ), indi si farà separatamente il quadrato sì del numeratore che del denominatore. Quindi il quadrato di  $7\frac{1}{4}$  sarà lo stesso che il quadrato di  $\frac{29}{4}$ ; esso sarà  $\frac{841}{16}$ .

117. Finalmente per elevare a quadrato un numero che contiene interi e decimali, o sola-

mente decimali, è chiaro, per la moltiplicazione de' decimali stabilita nell' art. 94, che conviene fare il quadrato di esso numero, come se tutte le cifre esprimessero unità intere, indi separare verso la dritta del quadrato tante caselle, per decimali, quante sono le cifre decimali contenute nel numero proposto. Così il quadrato di 478 essendo 228484, quello di 4,78 sarà 22,8484: parimente, il quadrato di 2485 essendo 6165289, quello di 2,485 sarà 6,165289.

*Della estrazione della radice quadrata.*

118. Siccome il prodotto che si ottiene dal moltiplicare più volte di seguito un numero per se medesimo, si chiama generalmente potenza di questo numero; così il numero per rispetto alla potenza si dirà *radice*. E si dirà *radice quadrata*, se la potenza a cui si rapporta il numero è un quadrato. Così 3 sarà la radice quadrata di 9; sarà 5 la radice quadrata di 25; e 7 sarà la radice quadrata di 49.

119. Ognun vede che qualsivia numero si può inalzare a quadrato, ma non si può da qualunque numero estrarre la radice quadrata.

Così la radice quadrata di 9 è 3; quella di 16 è 4: ma dai numeri che son compresi tra 9 e 16, non si potrà estrarre la radice quadrata. In tal caso si ricorre al numero quadrato prossimamente minore del numero da cui si vuole estrarre la radice; la quale, come vedremo in appresso, si approssimerà alla vera coll' aiuto dei

decimali. Non potendosi, per esempio, estrarre la radice quadrata di 22, si prenderà la radice di 16, la quale è 4; indi si cercherà per mezzo de' decimali di approssimarla alla vera.

120. Ciò premesso, passiamo a vedere come si debba estrarre la radice quadrata da un numero espresso da quante cifre si vogliano. Per esempio, un tal numero sia 56169. Esso si divida in caselle come qui si vede.

$$\begin{array}{r|l}
 5, 61, 69. & .237 \\
 \hline
 4 & \begin{array}{r} 4 \\ \hline 16 \\ 5 \quad 29 \\ \hline 32 \quad 6 \\ 5 \quad 61 \quad 69 \\ \hline 0 \quad 00 \quad 00. \end{array}
 \end{array}$$

Perciocchè nella prima casella a sinistra, la quale nel presente caso ha la sola cifra 5, si contiene la prima cifra della radice (113); noi otterremo questa cifra estraendo la radice quadrata da 5: essa è 2; che metteremo in primo posto alla dritta del numero da cui si vuole estrarre la radice. Togliamo dalla prima casella 5 il quadrato della cifra 2, cioè 4; e alla dritta del resto 1 abbassiamo 6, che è la prima cifra a sinistra della casella 61. Siccome in 61 si contiene il doppio del prodotto di 2 per la seconda cifra della radice (113), così per ottenero

questa seconda cifra bisogna dividere 16 pel doppio di 2 ossia per 4; il qual numero si è scritto qual primo divisore alla sinistra di 16. Or il quoto della divisione di 16 per 4 è 4; che dovremmo scrivere dopo 2 per seconda cifra della radice che si cerca. Ma il quadrato di 24 essendo 576, non si può sottrarre dal numero che si contiene nelle prime due caselle a sinistra: onde converrà scrivere 3 per seconda cifra della radice. Togliamo dalle due prime caselle a sinistra, cioè da 561 il quadrato di 23, che è 529; e alla dritta del residuo 32 abbassiamo la cifra 6, che è la prima a sinistra della terza ed ultima casella. E perchè in 326 si contiene il doppio del prodotto di 23 per la terza cifra della radice ( 113 ), otterremo questa terza cifra dividendo 326 pel doppio di 23, vale a dire per 46: il quoto è 7 che scriveremo dopo 3 per terza cifra della radice dimandata. Finalmente sottraendo il quadrato di 237, che è 56169 dal numero contenuto nelle tre caselle 5, 61, 69, resta 0: sicchè la radice esatta di 56169 è 237.

121. Riflettendo, che dopo aver sottratto dalla prima casella a sinistra il quadrato della prima cifra della radice, nel residuo con la casella che segue contiensi il doppio del prodotto della prima cifra per la seconda, ed il quadrato della stessa seconda cifra; e la medesima cosa avendo luogo per gli altri residui una con le successive caselle; si potrà con un mezzo più breve estrarre la radice quadrata. Ond' è che per meglio ingerrirlo negli animi de' principianti, ci proponiamo

di estrarre la radice quadrata anche dal numero seguente, e già diviso nelle dovute caselle.

|      |             |     |
|------|-------------|-----|
|      | 53, 14, 41. | 729 |
|      | 49          |     |
| 142  | 41. 4       |     |
| 2    | 28 4        |     |
| 1449 | 13 04 1     |     |
| 9    | 13 04 1     |     |
|      | 00 00 0.    |     |

Estratta dalla prima casella 53 la radice quadrata che è 7, e scritta la cifra 7 a destra del numero proposto, si tolga da 53 il quadrato di 7, il resto sarà 4: si abbassi alla destra di 4 la seguente casella 14, la cui seconda cifra 4 si distacchi con un punto. Si divida soltanto 41 pel doppio di 7, vale a dire per 14, e l'quoziente 2 si noti per seconda cifra della radice che si cerca; ma si noti ancor 2 alla dritta del divisore 14, e ciò che risulta 142 si moltiplichi per 2, ed il prodotto 284 si sottragga da 414: perciocchè in tutto il numero 414 si contiene 284, cioè il doppio del prodotto di 7 per 2, ed il quadrato di 2. Similmente si abbassi alla dritta del residuo 130 la terza ed ultima casella 41, distaccandone con un punto la seconda cifra della casella, cioè a dire 1. Si divida solamente 1304 pel doppio di 72, ossia per 144; e notisi il quoziente 9 per ultima cifra della radice. Notisi e-

ziandio 9 alla dritta del divisore 144; e 1449 che ne risulta si moltiplichino per 9, ed il prodotto 13041 sottraggasi da tutto il numero 13041; resterà 0. Sicchè la radice esatta di 531441 è 729.

Non si durerà fatica a comprendere come si debba procedere, se il numero da cui si vuol estrarre la radice, fosse composto da un maggior numero di caselle.

122. Si può conchiudere dalla maniera con cui si forma il quadrato di una frazione ( 115 ), che la radice di una frazione si ottiene estraendola separatamente sì dal numeratore che dal denominatore.

Così la radice di  $\frac{4}{9}$  sarà  $\frac{2}{3}$ ; quella di  $\frac{16}{81}$  sarà  $\frac{4}{9}$ ; e quella di  $\frac{144}{121}$  sarà  $\frac{12}{11}$ .

125. Qualora vogliasi estrarre la radice quadrata da un numero che contenga decimali, bisognerà dividere gl'interi in caselle da destra a sinistra, e i decimali da sinistra a destra, acciocchè, se le cifre decimali sieno in numero dispari, si possa aggiugnere alla loro dritta uno zero onde completare la casella; nel qual caso il denominator decimale essendo 100, 10000, 1000000, ec. esso sarà sempre un quadrato perfetto. Ciò fatto si estrarrà la radice, come se tutte le cifre rappresentassero unità intere, indi verso la dritta della radice si separeranno tante cifre quante sono le caselle decimali.

Così dovendo estrarsi la radice quadrata da 2837, 6929, la si estrarrà da 28376929 la quale è 5327; e separando a dritta due cifre decimali, sarà 53, 27 la radice cercata. Similmente diven-

dosi estrarre la radice quadrata da 342, 687; si aggiungerà prima uno zero a destra, indi si estrarrà la radice da 3426870. La radice di questo numero è 1851, non però esatta, poichè vi ha 669 di resto: e separando verso la dritta due cifre decimali, la radice prossima del numero 342, 687 è 18, 51.

124. Avendo trovato la radice di 342, 687 non essere esatta, a cagion del resto 669, noi potremo approssimarla alla vera fino ad una quantità minore di  $\frac{1}{1000}$ , di  $\frac{1}{10000}$ , di  $\frac{1}{100000}$ , ec. aggiungendo cioè alla destra del numero per ogni approssimazione, una coppia di zeri, e proseguendo l'operazione come di sopra si è insegnato.

125. Della medesima maniera si potrà rendere così prossima alla vera che si vorrà, la radice di un numero intero. Sia per esempio da approssimarsi sino alle parti millesime la radice di 14. Si aggiungano alla destra di 14 tre coppie di zeri, e si faccia l'operazione come qui si vede.

|       |                |        |
|-------|----------------|--------|
|       | 14. 00, 00, 00 | 5, 741 |
|       | 9              |        |
| 67    | 5 0.0          |        |
| 7     | 4 69           |        |
|       | <hr/>          |        |
| 744   | 31 0.0         |        |
| 4     | 29 76          |        |
|       | <hr/>          |        |
| 7481. | 1 2 40.0       |        |
| 1     | 7 48 1         |        |
|       | <hr/>          |        |
|       | 4 91 9.        |        |

Adunque la radice quadrata di  $1\frac{1}{4}$  è prossimamente 5, 741; e si potrebbe approssimare anche più con aggiugnere a dritta altre coppie di zeri.

126. Abbiamo detto che la radice della frazione si ottiene, estraendo la radice quadrata tanto dal numeratore quanto dal denominatore: or se mai dai due termini della frazione, ovvero da uno de' due non si potrà estrarre la radice quadrata, si svolgerà la frazione in decimali, giusta l'articolo 102, indi si estrarrà la radice del modo qui sopra insegnato. Vogliasi in grazia di esempio, estrarre la radice quadrata da  $\frac{1}{4}$ . Siccome questa frazione ridotta in decimali è uguale prossimamente a 0, 285714, e la radice di 0, 285714 è 0, 533, non però esatta; così la radice prossima di  $\frac{1}{4}$  si dirà essere 0, 533.

Si avverta che le cifre decimali 2, 8, 5, 7, 1, 4 costituiscono il periodo della frazione decimale, a cui si riduce la frazione ordinaria  $\frac{1}{4}$ : ond'è che si può ripetere un tal periodo tante volte che ne piacerà; e con ciò la radice quadrata di  $\frac{1}{4}$  si potrebbe sempre più approssimare.

### *Della formazione de' cubi.*

127. Abbiamo diggià notato che il prodotto di un numero, moltiplicato due volte di seguito per esso medesimo, si chiama *cubo* di un tal numero.

128. Siccome per la formazione del cubo di un numero composto conviene sapere i cubi dei

numeri semplici, eccoli disposti qui sotto ne' luoghi rispettivi:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.  
Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

129. Se bisognasse fare il cubo di un numero terminato da zeri, per esempio, 500, converrebbe moltiplicare 500 per 500 e per 500, lo che si ottiene moltiplicando 5 per 5 e per 5, ed aggiugnendo alla dritta del prodotto 27 sei zeri, cioè il triplo di quelli che ne ha 500; tal che il richiesto cubo è 27000000. Laonde per avere il cubo di un numero seguito da zeri, fa d'uopo innalzare a cubo le sole cifre significative, ed aggiugnere alla dritta tre volte tanti zeri, quanti ne ha il numero che si vuole innalzare a cubo.

Quindi se alla destra di 2197 che è il cubo di 13, si pongano 9 zeri, si avrà 2197000000000 pel cubo di 13000.

130. Oltracciò, essendo il cubo di 7 uguale a 7 moltiplicato per 7 moltiplicato per 7, ossia al quadrato di 7 moltiplicato di nuovo per 7; ed avendo già dimostrato essere il quadrato di 7 uguale ai seguenti prodotti:

4 per 4; 4 per 3; 4 per 3; 3 per 3:

ne segue, che il cubo di 7 si otterrà moltiplicando per 7 ciascuno di questi parziali prodotti; o ciò che è lo stesso, moltiplicando questi par-

ziali prodotti una volta per 4, ed un'altra volta per 3, indi facendo la somma de' prodotti che risultano. Sicchè il cubo di 7 sarà uguale a tutti questi prodotti:

4 per 4 per 4 ; 4 per 4 per 3 ; 4 per 4 per 3 ;  
 3 per 3 per 4 ; 4 per 4 per 3 ; 4 per 3 per 3 ;  
 4 per 3 per 3 ; 3 per 3 per 3.

Or per poco che un vi rifletta, si accorgerà che il primo e l'ultimo di questi prodotti sono i cubi rispettivi di 4 e di 3; che il secondo, il terzo ed il quinto fanno il triplo del quadrato di 4 per 3; e che i rimanenti fanno il triplo del quadrato di 3 per 4. Dunque se un numero si divida in due parti comunque, il cubo di esso numero sarà uguale ai rispettivi cubi delle parti, accresciuti del triplo del quadrato della prima parte moltiplicato per la seconda, e del triplo del quadrato della seconda moltiplicato per la prima.

151. Premesse queste cose, passiamo a vedere come si debba elevare a cubo un numero qualsivoglia; e sia primieramente composto di due cifre, per esempio, 27. Siccome 27 si può sciorre in 20 più 7, il cubo di 27 si otterrà unendo insieme il cubo di 20, il triplo del quadrato di 20 moltiplicato per 7, il triplo del quadrato di 7 moltiplicato per 20, ed il cubo di 7. Eccone il calcolo.

( 132 )

$$\begin{array}{r} 8000 \\ 8400 \\ 2940 \\ 543 \\ \hline 19683. \end{array}$$

Intanto se cancelliamo i zeri che sono alla destra di questi numeri, la somma affatto non si altera. Onde il cubo di 27 si può esprimere anche in questo modo:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 84 \\ 294 \\ 543 \\ \hline 19683 \end{array}$$

Vale a dire, il cubo di un numero composto di due cifre si ottiene, unendo in una somma il cubo della prima cifra, il triplo del quadrato della prima cifra moltiplicato per la seconda, il triplo del quadrato della seconda moltiplicato per la prima, ed il cubo della seconda, scritti però tutti questi numeri in modo, che ciascuno superi il precedente di un posto verso la dritta.

132. Sia ancora da elevarsi a cubo un numero composto di tre cifre, qual sarebbe 274. Considerandolo diviso nelle parti 270 più 4, il cubo

( 133 )

di esso si otterrà (130), riunendo insieme il cubo di 270, il triplo del quadrato di 270 moltiplicato per 4, il triplo del quadrato di 4 moltiplicato per 270 ed il cubo di 4; cioè facendo la somma de' seguenti numeri:

$$\begin{array}{r} 19683000 \\ 874800 \\ 12960 \\ 64 \\ \hline 20570824. \end{array}$$

Ma potendosi 270 decomporre in 200 più 70; il cubo di 270 si farà uguale alla somma del cubo di 200, più del triplo del quadrato di 200 moltiplicato per 70, più del triplo del quadrato di 70 moltiplicato per 200 e del cubo di 70: onde sostituendo tali numeri, in vece della prima delle serie orizzontali scritte qui sopra, il cubo di 174 sarà uguale alla somma di tutti i numeri che seguono:

$$\begin{array}{r} 8000000 \\ 8400000 \\ 2940000 \\ 345000 \\ 874800 \\ 12960 \\ 64 \\ \hline 20570824. \end{array}$$

E perchè cancellando i zeri che sono alla dritta

di siffatti numeri, la somma non viene punto ad alterarsi, si otterrà il cubo di 274 anche in quest' altra maniera:

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 84 \\
 294 \\
 345 \\
 8748 \\
 1296 \\
 64 \\
 \hline
 20570824.
 \end{array}$$

Cioè a dire, si avrà il cubo di 274 sommando insieme il cubo di 2, il triplo del quadrato di 2 per 7, il triplo del quadrato di 7 per 2 ed il cubo di 7; il triplo del quadrato di 27 per 4, il triplo del quadrato di 4 per 27 ed il cubo di 4; scritti però tutti questi numeri in modo, che ciascuno superi il precedente di un posto sulla dritta.

E potendosi il medesimo discorso applicare ad un numero qualunque, ne segue: che il cubo di un numero composto di quante cifre si voglia-  
no, si ottiene, aggiungendo insieme il cubo della prima cifra, il triplo del quadrato di essa prima cifra moltiplicato per la seconda, il triplo del quadrato della seconda moltiplicato per la prima ed il cubo della seconda; più il triplo del quadrato delle due prime cifre moltiplicato per la

terza, il triplo del quadrato della terza moltiplicato per le due prime ed il cubo della terza; più il triplo del quadrato delle tre prime cifre moltiplicato per la quarta, ec; scritti però tutti questi numeri in tal maniera, che ciascuno si trovi di un posto più avanzato verso la dritta che il precedente.

135. Per esaminare la disposizione delle parti di un cubo convien riflettere, che, essendo 1000 il cubo di 10, il cubo di un numero espresso da una cifra non potrà contenere più di tre cifre. Similmente essendo 1000000 il cubo di 100, il cubo di un numero composto di due cifre non conterrà più di sei cifre. Col medesimo ragionamento si può dimostrare, che il cubo di un numero composto di tre cifre non conterrà più di nove cifre; ed in generale, che il cubo di un numero qualunque non conterrà mai più del triplo delle cifre onde un tal numero si compone. Sicchè se il cubo di un numero si divida da destra a sinistra in caselle, ognuna composta di tre cifre, all'infuori dell'ultima a sinistra che potrà averne anche di meno, esse caselle saranno tante quante sono le cifre del numero elevato a cubo.

Inoltre, richiamando a disamina il cubo di 27, che qui innanzi si è trovato essere 19685, osserveremo prima che il cubo delle decine, cioè di 20, il qual cubo è 8000, non ha cifre significative di un ordine inferiore alle migliaia; che perciò esso cubo dee contenersi nelle 19 migliaia di 19685. Onde sottratto il cubo delle decine, cioè a dire 8000 da 19685, avremo di resto 11685.

Considerando in secondo luogo che il prodotto del triplo del quadrato delle decine moltiplicato per le unità, non ha cifre di un ordine inferiore alle centinaia, è manifesto, che il prodotto del triplo del quadrato di 20 per 7, cioè 8400, dee contenersi nelle 116 centinaia del resto 11683. Il perchè sottratto ancora 8400 da 11683, resta 3283.

Riflettendo in terzo luogo che il triplo del quadrato delle unità moltiplicato per le decine non ha cifre significative di un ordine inferiore alle decine, si rileva, che il triplo del quadrato di 4 per 27 dee contenersi nelle 328 decine del residuo 3283. Per la qual cosa, tolto 2940 da 3283, si ha il resto 343; in cui si contiene, come ognun vede, il cubo della seconda cifra.

Facendo il medesimo discorso sopra il cubo di un numero espresso da quante cifre si vogliano, potremo generalmente conchiudere: che nella casella che è la prima a sinistra, si contiene il cubo della prima cifra di esso numero; che ne' rispettivi residui una con le cifre che sono alla destra delle virgole, si contengono i tripli de' prodotti fatti dal quadrato della prima cifra per la seconda, dal quadrato delle due prime cifre per la terza, dal quadrato delle tre prime cifre per la quarta, ec.; che ne' rispettivi resti insieme colle cifre che sono nel mezzo delle caselle, si contengono i tripli de' prodotti fatti dal quadrato della seconda cifra per la prima, dal quadrato della terza per le due prime, dal quadrato della quarta per le tre prime, ec.; e

che finalmente ne' residui rispettivi insieme colle cifre che sono alla sinistra delle virgole, si contengono i cubi delle cifre del numero le quali succedono a quella che è la prima a sinistra.

134. Questa disposizione delle parti di un cubo dee ben comprendersi, acciocchè, un cubo essendo dato, si sappia rinvenire il numero di cui quello è cubo. E perciò è buono che i giovani si esercitino su i cubi particolari, sottraendo da essi le parti componenti, e coll' ordine medesimo col quale alla fine dell' articolo 132 si sono da noi enunciate. Potranno servirsi, a cagion di esempio, del cubo di 3467, che soggiungiamo qui sotto colla nota divisione in caselle.

$$\begin{array}{r}
 27 \\
 108 \\
 144 \\
 64 \\
 20808 \\
 3672 \\
 216 \\
 2514036 \\
 50862 \\
 343 \\
 \hline
 41,673,648,663
 \end{array}$$

135. Da ciò che abbiamo detto si rileva facilmente, che il cubo di una frazione si ottiene

facendo separatamente il cubo del numeratore e quello del denominatore. Così il cubo di  $\frac{2}{3}$  sarà  $\frac{8}{27}$ ; il cubo di  $\frac{4}{5}$  sarà  $\frac{64}{125}$ ; e quello di  $\frac{11}{13}$  sarà  $\frac{1331}{2197}$ .

136. E se il numero che si vuole elevare a cubo sia un intero unito a frazione, si ridurrà prima ad una sola frazione (75), indi si farà il cubo del numeratore e quello del denominatore. Per esempio, il cubo di  $2\frac{1}{3}$  sarà uguale a quello di  $\frac{7}{3}$ : esso cubo sarà  $\frac{343}{27}$ .

137. Finalmente se vogliasi innalzare a cubo un numero contenente decimali, si farà il cubo, come se tutte le cifre di esso rappresentassero unità intere; indi si dovranno separare su la dritta tante caselle decimali, ognuna però composta di tre cifre, quante sono le cifre decimali contenute in detto numero. Quindi il cubo di 247 essendo 15069223, quello di 2, 47 sarà 15, 069223. Similmente il cubo di 1325 essendo 2526205125, quello di 13, 25 sarà 2526, 205125.

### *Dell'estrazione della radice cubica.*

138. Il numero che moltiplicato due volte di seguito per esso medesimo costituisce il cubo, per rispetto a questo, si chiama *radice cubica*. Così 2 è la radice cubica di 8; 5 è la radice cubica di 125.

139. Si comprende facilmente che la radice cubica non si può estrarre se non dai numeri che sono cubi perfetti. Per esempio, la radice cubica di 27 sarà 3, e quella di 64 sarà 4; ma

dai numeri che son compresi tra 27 e 64 non si può estrarre la radice cubica. In tal caso si ricorrerà al cubo prossimamente minore del numero da cui si vuole estrarre la radice; e sebbene una tal radice non sia esatta, la si renderà prossima alla vera coll' aiuto de' decimali.

140. Vediamo come si debba procedere nell' estrarre la radice cubica da un numero composto da quante cifre si vogliano: sia, per esempio, 20570824. Incominciando dalla dritta si divida in caselle, ognuna composta di tre cifre, salvo l' ultima a sinistra che nel presente caso ne ha due.

|      |  |                   |     |
|------|--|-------------------|-----|
|      |  | 20, 570, 824      | 274 |
|      |  | 8                 |     |
| 12   |  | <hr/> 12 5        |     |
|      |  | 19 685            |     |
| 2187 |  | <hr/> 887 8       |     |
|      |  | 20 570 824        |     |
|      |  | <hr/> 00 000 000. |     |

Perciocchè nella casella 20 che è la prima, a contar dalla sinistra, contiensì la prima cifra della radice, questa cifra si otterrà estraendo la radice cubica da 20, cioè estraendo la radice cubica da 8 che è il cubo minore di 20: una tal radice è 2, che noi scriveremo alla dritta del

numero dato come prima cifra della radice che si cerca. Sottratto il cubo di 2 ossia 8 dalla prima casella 20, si abbassi alla dritta del resto 12 la prima cifra 5 della seguente casella. Siccome in 125 si contiene il prodotto del triplo del quadrato di 2 moltiplicato per la seconda cifra della radice cubica (133), così otterremo la seconda cifra dividendo 125 pel triplo del quadrato di 2, cioè per 12; essendo chiaro che il prodotto diviso per uno de' fattori dà l'altro per quoziente. Ma il quoziente 9 di siffatta divisione non può essere la seconda cifra della radice dimandata, perchè il cubo di 29 è maggiore del numero 20570, contenuto nelle prime due caselle, e per la stessa ragione nemmeno può essere 8; onde converrà scrivere 7 per seconda cifra. Il cubo di 27 essendo 19683, lo si sottragga dalle prime due caselle del numero dato; e accanto al residuo 887 si abbassi la prima cifra 8 della terza ed ultima casella. Nel numero 8878 contenendosi il triplo del quadrato di 27 per la terza cifra della radice cubica, bisognerà dividere 8878 pel triplo del quadrato di 27, cioè per 2187: il quoto è 4, che porremo per terza cifra della radice cercata. Ed il cubo di 274 essendo sottratto dal numero dato, resterà zero: onde conchiuderemo che la radice cubica di 20570824 è 274.

Non si stenterà a comprendere come si debba estrarre la radice cubica di un numero composto da un maggior numero di cifre.

141. Dalla maniera con cui si forma il cubo

di una frazione ( 135 ) si può dedurre, che per avere la radice cubica di una frazione, bisogna estrarla separatamente tanto dal numeratore quanto dal denominatore.

Così la radice cubica di  $\frac{17}{111}$  è  $\frac{1}{11}$ ; quella di  $\frac{1117}{111111}$  è  $\frac{1}{11}$ .

142. Dovendosi estrarre la radice cubica da un numero che contenga decimali, converrà dividere l'intero da dritta a sinistra in caselle, ognuna però composta di tre cifre, e i decimali da sinistra a dritta; acciocchè, se manchino delle cifre nell'ultima casella decimale ossia nella prima a dritta, si possano supplire tali mancanze co' zeri. Nel qual caso il denominator decimale essendo 1000, 1000000, 1000000000, ec. sarà sempre un cubo perfetto. Ciò fatto, si estrarrà la radice cubica come se tutte le cifre esprimessero unità intere, e poi verso la dritta si separeranno tante cifre quante sono le caselle decimali.

Così dovendosi estrarre la radice cubica da 54, 010152, la si estrarrà da 54010152: essa è 378; e separando verso la dritta due cifre decimali, sarà 3, 78 la radice cubica addimandata. Similmente dovendosi estrarre la radice cubica da 57, 3247, si aggiungeranno due zeri a dritta, e si estrarrà la radice cubica da 57324700: una tal radice, non però esatta, perchè evvi di resto 258075, è 385; e separando verso la dritta due cifre decimali, la radice richiesta sarà 3, 85.

143. Se alla destra del numero 57324700 si aggiungano a tre a tre quanti zeri si vogliano,

e si continui col metodo ordinario ad estrarre la radice cubica, questa si approssimerà sempre più alla vera. Ciochè facilmente si comprende, dal considerare che non si muta il valore di un numero decimale ponendo alla destra di esso qualunque numero di zeri. Ed eziandio la radice cubica di un numero intero si può approssimare fino a che ne piaccia, sol che alla destra di un tal numero si aggiungano le opportune caselle, ognuna composta di tre zeri.

Cerchiamo di approssimare la radice cubica di 12 sino alle parti millesime. Aggiungiamo alla destra di 12 tre caselle ognuna composta di tre zeri, come qui sotto si vede, e tiriamone la radice cubica nella maniera insegnata.

|        |                       |        |
|--------|-----------------------|--------|
|        | 12. 000,000,000       | 2, 286 |
|        | <u>8</u>              |        |
| 12     | 4 0                   |        |
|        | <u>10 648</u>         |        |
| 1452   | 1 352 0               |        |
|        | <u>11 852 352</u>     |        |
| 155952 | 147 648 0             |        |
|        | <u>11 946 169 656</u> |        |
|        | 53 830 344            |        |

144. Quando dal numeratore o dal denomi-

natore, o da niuno de' termini della frazione, si può estrarre la radice cubica, convienne svolgere la frazione ordinaria in frazione decimale, indi estrarre la radice cubica come dianzi si è detto.

Sia da estrarre la radice cubica da  $\frac{5}{11}$ : la frazione decimale a cui  $\frac{5}{11}$  è prossimamente uguale, è 0, 45454545 ..... Sicchè si estrarrà la radice cubica da 0, 45454545. Questa radice essendo 0, 766, si dirà che la radice cubica di  $\frac{5}{11}$  è prossimamente 0, 766.

*Dell' uso dell' aritmetica ossia delle ragioni e proporzioni.*

145. Si dice *ragione* il rapporto di due grandezze del medesimo genere, paragonate tra loro secondo la quantità. Le due grandezze che si paragonano, si chiamano *termini* della ragione; e quella che si paragona dicesi *antecedente*, e l'altra *conseguente*. Tra l' antecedente ed il conseguente si sogliono interporre due punti verticali, come nella ragione di 8: 2, che si enuncia la ragione di 8 a 2.

146. In due maniere si possono confrontare le grandezze, o considerando quanto l' una l' altra contiene, o di quanto l' una l' altra eccede. Nel primo caso la ragione si dice *geometrica*, e nel secondo *aritmetica*. Così la ragione di 10: 2 si dirà geometrica, se io concepisca che 10 contiene 2 cinque volte; e si dirà aritmetica, se io consideri che 10 eccede 2 di otto.

147. Si dice *esponente* ovvero *quantità* di ra-

gione, nella geometrica, il quoto che si ottiene dividendo l' antecedente pel conseguente; e nella ragione aritmetica, il resto che si ha sottraendo dall' antecedente il conseguente. Così l' esponente della ragione geometrica di  $6:2$  è  $5$ ; e quello della ragione aritmetica di  $7:5$  è  $4$ .

Per ragione intendosi propriamente la geometrica; ond'è che volendo disegnare la ragione aritmetica, bisogna esprimerla, con dire, per esempio, la ragione aritmetica di  $5:2$ .

148. Potendosi l' esponente della ragione geometrica esibire per mezzo di una frazione, in cui l' antecedente fa da numeratore e il conseguente da denominatore; e riflettendosi che non si muta il valore d' una frazione moltiplicando o dividendo tanto il numeratore quanto il denominatore pel medesimo numero; non si muterà il rapporto geometrico di due grandezze, qualora si moltiplichino o si divida sì l' antecedente che il conseguente per un medesimo numero. Quindi la ragione di  $3:2$  è la medesima che quella di  $6:4$ ; di  $15:10$ ; di  $30:20$ ; ec. Similmente la ragione di  $45:30$  è la medesima che quella di  $9:6$ , avendo diviso per  $5$  sì l' antecedente  $45$  che il conseguente  $30$ ; e la ragione di  $9:6$  sarà la medesima che quella di  $3:2$ , dividendo per  $3$  tanto l' antecedente  $9$  quanto il conseguente  $6$ .

149. Due ragioni, o sieno geometriche, o sieno aritmetiche, si diranno uguali, se uguali saranno i loro esponenti; e quella si dirà maggiore dell' altra, che avrà l' esponente maggiore. Così la ragione geometrica di  $8:4$  è uguale a quella di  $6:3$ ,

perchè in ognuna di esse l'esponente è 2; ma la ragione di 6: 2 è maggiore di quella di 10: 5, perchè l'esponente della prima è 3, e quello della seconda è 2. Parimenti la ragione aritmetica di 7: 5 è uguale a quella di 3: 1, perchè in ognuna di esse l'esponente è 2; ma la ragione aritmetica di 7: 4 è maggiore di quella di 8: 6, perchè l'esponente della prima è 3, e quello della seconda è 2.

150. La ragion *semplice* è quella il cui esponente si ottiene dal paragonare l'antecedente col conseguente. Si dice ragion *composta* quella che ha per esponente il prodotto degli esponenti di più ragioni semplici. Sieno, per esempio, le ragioni semplici 8: 2, 6: 3, 15: 5; i loro rispettivi esponenti sono 4, 2 e 3; onde la ragion di 24: 1 sarà la composta dalle ragioni di 8: 2, di 6: 3 e di 15: 5. Una tal ragion composta si suol rappresentare nel seguente modo, 24: 1 :: (8: 2) (6: 3) (15: 5).

151. Potendosi gli esponenti delle accennate ragioni semplici esibire per mezzo delle frazioni  $\frac{4}{1}$ ,  $\frac{2}{1}$  e  $\frac{3}{1}$ , si avrà eziandio la ragion composta moltiplicando tra loro queste frazioni; cioè moltiplicando separatamente tra loro tanto i numeratori 8, 6 e 15, che i denominatori 2, 3 e 5; tal che sarà la desiata ragion composta 720: 50; ovvero 72: 5, dividendo per 10 tanto l'antecedente quanto il conseguente; o finalmente 24: 1, dividendo per 3 i termini dell'ultima ragione 72: 5. Da ciò si vede che si può altresì ottenere la ragion composta paragonando il prodotto degli

antecedenti delle ragioni semplici a quello de' loro conseguenti; e questo mezzo riesce sovente più comodo nel formare la ragion composta.

Vogliasi, per esempio, la ragion composta dalle ragioni di 5: 3, di 7: 4, e di 11: 8. Si moltiplichino tra loro gli antecedenti 5, 7 e 11, come anche i conseguenti 3, 4 e 8; avremo 385: 96:: (5: 3) (7: 4) (11: 8); vale a dire 385: 96 in ragion composta di 5: 3, di 7: 4 e di 11: 8.

152. La ragion composta da due ragioni uguali si dice *duplicata* di una di esse. La ragion composta da tre ragioni uguali si dice *triplicata* di una di esse. E se le ragioni uguali sono quattro, la composta si dirà *quadruplicata* di una delle componenti, ec.

Così la ragion composta dalle due ragioni uguali 8: 4 e 6: 3, cioè la ragione di 48: 12, sarà duplicata della ragione di 8: 4 oppure di quella di 6: 3. Ma riflettendo che la ragione di 8: 4 è la medesima che quella di 6: 3, si otterrà eziandio la duplicata di 6: 3 facendo la ragion composta di 6: 3 e di 6: 3, cioè una tal duplicata sarà la ragion di 36: 9. Dal che chiaramente si rileva, che la ragion duplicata di due grandezze potrà esprimersi dal rapporto che ha il quadrato dell'antecedente al quadrato del conseguente.

Similmente la ragion composta dalle tre ragioni uguali 6: 2, 9: 3 e 15: 5, cioè la ragione di 810: 30, sarà triplicata della ragione di 6: 2 oppur di quella di 9: 3 ovvero di quella di 15: 5. E considerando che ciascuna delle ragioni com-

ponenti 9: 5 e 15: 5 si può esibire per mezzo di quella di 6: 2, si otterrà la triplicata che si cerca, facendo la ragion composta di 6: 2, 6: 2 e 6: 2; cioè la ragion triplicata di 6: 2 sarà quella di 216: 8. Vale a dire, la ragion triplicata di due grandezze si ha paragonando il cubo dell'antecedente a quello del conseguente. Col medesimo discorso si può provare che la ragion quadruplicata di due grandezze non differisce dal rapporto, che ha la quarta potenza dell'antecedente a quella del conseguente; ee.

153. Se vi sieno più grandezze omogenee, come 5, 7, 3, 2 e 8, l'esponente della ragione di 5: 8 sarà  $\frac{5}{8}$ ; e non si muterà il valore di questa frazione, se tanto il numeratore 5 quanto il denominatore 8 si moltiplichino per numeri 7, 3 e 2; talchè  $\frac{5}{8}$  sarà uguale a  $\frac{5 \text{ moltip. per } 7 \text{ moltip. per } 3 \text{ moltip. per } 2}{8 \text{ moltip. per } 7 \text{ moltip. per } 3 \text{ moltip. per } 2}$ ; o ciò che è lo stesso, sarà  $\frac{5}{8}$  uguale a  $\frac{5 \text{ moltip. per } 7 \text{ moltip. per } 3 \text{ moltip. per } 2}{7 \text{ moltip. per } 3 \text{ moltip. per } 2 \text{ moltip. per } 8}$ .

Ma questa frazione è l'esponente della ragion composta dalle ragioni di 5: 7, di 7: 3, di 3: 2 e di 2: 8. Dunque eziandio  $\frac{5}{8}$  sarà l'esponente della ragion composta dalle suddette ragioni, ossia 5: 8 è in ragion composta di 5: 7, di 7: 3, di 3: 2 e di 2: 8. Dal che si scorge, che se vi sia una serie di più grandezze omogenee, la ragione della prima all'ultima è la stessa che quella che si compone della ragione che la prima ha alla seconda, di quella che la seconda ha alla terza, di quella che la terza ha alla quarta, e così di seguito, sino alla ragione che ha la penultima all'ultima delle grandezze.

154. Una ragione si dice *diretta* di un' altra, se l' antecedente della prima è al suo conseguente, come l' antecedente della seconda al conseguente suo. Così la ragione di 8: 4 si dice diretta a quella di 6: 3, poichè 8 sta a 4 come 6 a 3. Ma una ragione si dice *inversa* o *reciproca* di un' altra, se l' antecedente di quella è al conseguente suo, come il conseguente di questa al suo antecedente. Così la ragione di 4: 2 è reciproca a quella di 5: 10, perchè 4: 2 è nella medesima ragione che 10: 5. E perchè mutandosi di una ragione l' antecedente in conseguente, l' una diventa reciproca dell' altra; perciò suol dirsi che la ragion reciproca è quella, che ha l' antecedente come conseguente.

155. La ragion reciproca di 7: 5 si può benanche esibire per mezzo di  $\frac{7}{5}$ :  $\frac{1}{1}$ . Ed in vero, l' esponente della ragion reciproca di 7: 5 ossia quello di 5: 7 è  $\frac{1}{7}$ ; e l' esponente della ragione di  $\frac{7}{5}$ :  $\frac{1}{1}$  è altresì  $\frac{1}{7}$ , come ognuno può assicurarsene dividendo la frazione  $\frac{7}{5}$  per l' altra  $\frac{1}{1}$ , giusta l' art. 78: dunque la ragion reciproca di 7: 5 si può rappresentare per mezzo di  $\frac{7}{5}$ :  $\frac{1}{1}$ .

156. Il perchè se deesi comporre una ragione dalla diretta di 3: 2, e dalla reciproca di 5: 8, la si comporrà dalle ragioni di 3: 2 e di  $\frac{1}{5}$ :  $\frac{1}{8}$ ; e una tal ragion composta sarà  $\frac{3}{5}$ :  $\frac{2}{8}$ . Dal che si vede, che per comporre una ragione da una diretta e da una reciproca, bisogna dividere l' antecedente della diretta per l' antecedente della reciproca, ed il conseguente di quella pel con-

seguinte di questa. Oltre a ciò, essendo la ragione di  $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$  composta dalla diretta di  $3 : 2$  e dalla reciproca di  $5 : 8$ , si può inferire, che le frazioni son tra loro in ragion composta dalla diretta de' numeratori, e dalla reciproca de' denominatori.

157. Del resto, nel comporre una ragione da una diretta e da un'altra reciproca, si può questa trasformare in diretta, mettendo l'antecedente in luogo del conseguente, e questo in luogo di quello; indi si eseguirà la ragion composta secondo l'art. 151, cioè paragonando il prodotto degli antecedenti a quello de' conseguenti. Così volendosi comporre una ragione dalla diretta di  $7 : 9$  e dalla reciproca di  $11 : 13$ , la si comporrà dalle ragioni di  $7 : 9$  e di  $13 : 11$ ; una tal ragion composta sarà quella di  $91 : 99$ .

158. Si dice *proporzione* l'uguaglianza di due ragioni. La proporzione sarà *geometrica*, se le due ragioni uguali sono geometriche; ed *aritmetica*, se quelle sono aritmetiche. Veramente per proporzione o *analogia* s'intende sempre la geometrica; ed impropriamente si dice proporzione aritmetica, ciò che meglio dir si potrebbe *equidifferenza*, poichè gli antecedenti differiscono per una medesima quantità da' loro conseguenti.

Tra le due ragioni uguali che costituiscono la proporzione geometrica, si sogliono interporre quattro punti; tal sarebbe  $8 : 4 :: 6 : 3$ , che si enuncia, come 8 a 4, così 6 stà a 3. Ma la proporzione aritmetica si scrive  $8. 5 : 10. 7$ ; e si esprime, dicendo, 8 a 5 è nella stessa ragione aritmetica che 10 a 7.

159. Una proporzione si dice *discreta* se vi sono quattro termini distinti; tal sarebbe  $10 : 2 :: 15 : 3$ . Ma la proporzione si dice *continua*, quando vi sono tre termini; e quello di mezzo, che fa da conseguente alla prima ragione e da antecedente alla seconda, si chiama *medio proporzionale*. Tal sarebbe  $8 : 4 :: 4 : 2$  in cui 4 è il medio proporzionale.

Similmente  $8 : 5 : 10$ . 7 sarebbe una proporzione aritmetica discreta; ed  $8 : 5 : 5 : 2$  sarebbe una proporzione aritmetica continua, in cui 5 dicesi *medio aritmetico proporzionale*.

Si è già avvertito che per proporzione s'intende la geometrica; onde di alcune proprietà di questa intendiamo qui appresso parlare.

160. Sia la proporzione  $2 : 6 :: 3 : 9$ , sarà  $\frac{2}{3}$  uguale a  $\frac{6}{9}$ ; e queste frazioni resteranno uguali, ancorchè si riducano al medesimo denominatore: onde  $\frac{2 \text{ mult. per } 3}{6 \text{ mult. per } 3}$  sarà uguale a  $\frac{3 \text{ mult. per } 2}{6 \text{ mult. per } 2}$ . Ma quando due frazioni sono uguali, ed hanno il medesimo denominatore, è segno che i numeratori sono uguali; dunque 2 moltiplicato per 9 è uguale a 6 moltiplicato per 3. Vale a dire, in ogni proporzione discreta, il prodotto de' termini estremi è uguale a quello de' termini di mezzo.

161. Se mai la proporzione fosse continua, qual sarebbe  $18 : 6 :: 6 : 2$ , il prodotto di 18 per 2 sarebbe eguale a quello di 6 per 6, che è appunto il quadrato di 6. Onde, in ogni proporzione continua, il prodotto de' termini estremi è eguale al quadrato del medio proporzionale.

162. Reciprocamente, se quattro numeri 3,

6, 4, 8 sono tali, che il prodotto de' due estremi 5 e 8 pareggi quello de' medii 6 e 4, si è certo che essi formano una proporzione. Ed in vero, essendo 3 moltiplicato per 8 uguale a 6 moltiplicato per 4, dividiamo sì l'uno che l'altro di questi prodotti per 8 moltiplicato per 6, avremo  $\frac{3 \text{ per } 8}{6 \text{ per } 8}$  uguale a  $\frac{6 \text{ per } 4}{6 \text{ per } 8}$ ; ma nella prima frazione si elide 3, trovandosi esso nel numeratore e nel denominatore; e per la medesima ragione si elide 6 nella seconda frazione: adunque  $\frac{1}{2}$  è uguale a  $\frac{1}{4}$ , e quindi 3: 6:: 4: 8.

163. Da ciò che si è detto, ne segue: 1.° che se in una proporzione discreta sieno dati tre termini, quali sarebbero 2, 6 e 7, si troverà il quarto proporzionale moltiplicando il secondo pel terzo, cioè 6 per 7, e dividendo il prodotto 42 che ne risulta pel primo termine 2; talchè si avrà 21 pel quarto proporzionale cercato. E ciò facilmente si comprende, se si rifletta che il prodotto di 6 per 7 è il medesimo che quello di 2 pel quarto ignoto: onde se si divida per 2 il prodotto di 6 per 7, il quoziente esser debbe l'altro fattore, cioè il quarto proporzionale che si cerca.

2.° Se sieno dati due termini, come 3 e 6, e si cerca il terzo proporzionale, questo si troverà dividendo il quadrato del secondo pel primo, cioè dividendo 36 per 3; onde sarà 12 il terzo proporzionale che si cerca; e quindi sarà 3: 6:: 6: 12.

3.° Oltre a ciò essendo dati i due termini estremi, si troverà il medio proporzionale, moltiplicando i due termini dati, ed estraendo dal loro prodotto la radice quadrata: così 8 e 2 essendo dati,

se si moltiplichì 8 per 2, e dal prodotto 16 si estrarra la radice quadrata 4, sarà questa radice il medio proporzionale che si cerca; dimodochè  $8:4::4:2$ .

4.° Ed i termini di una proporzione possono disporsi in tutte quelle maniere differenti in cui il prodotto de' termini estremi si fa uguale al prodotto de' termini di mezzo, perciocchè in tutti questi casi la proporzione non cessa di sussistere.

164. A noi giova di rilevare un solo di questi cangiamenti, per dedurne una conseguenza la quale in appresso ci sarà molto utile. Se in una proporzione si paragonino fra loro i due antecedenti e i due conseguenti, l'uguaglianza dei rapporti sussisterà; poichè non si fa altro che cambiare vicendevolmente il posto ai due termini di mezzo. Così essendo  $10:5::8:4$ , sarà ancora  $10:8::5:4$ . Ma si è dimostrato, nell'art. 148, che non si altera il rapporto geometrico dividendone i termini per un medesimo numero: dunque in una proporzione non si turba l'egualità de' rapporti, se dividansi per un medesimo numero i due antecedenti oppure i due conseguenti.

Premesse queste nozioni, passiamo alla risoluzione de' problemi, i quali, perchè si riducono a ritrovare il quarto termine di una proporzione, gli altri tre essendo dati, si dicono risolti colla *regola del tre*. Noi chiameremo  $x$  un tal quarto proporzionale.

*Della regola del tre semplice e diretta.*

165. Per comprare 18 canne di castoro si sono spesi 198 ducati; si vuol sapere per 35 canne quanti ducati bisogna spendere.

Scriviamo prima il problema nella maniera seguente :

Canne.. 1... 18  
 Canne.. 2... 35  
 Ducati.. 1... 198  
 Ducati.. 2... x.

Riflettendo che più sono le canne, più ducati bisogna spendere, e meno sono quelle, meno conviene spendere di ducati; e propriamente se il numero delle prime canne fosse doppio, triplo, quadruplo, ec. del numero delle seconde, anche la prima spesa sarebbe doppia, tripla, quadrupla, ec. della seconda: ovvero se il numero delle prime canne fosse la metà, la terza parte, la quarta parte, ec. del numero delle seconde, anche la prima spesa sarebbe la metà, la terza parte, la quarta parte, ec. della seconda; chiaramente si vede, che la ragion delle canne è diretta a quella dei ducati, e perciò

$$18: 35:: 198: x.$$

Or moltiplicando 198 per 35, e dividendo il prodotto 6930 per 18: si troverà 385 pel quarto

richiesto. Laonde se per 18 canne di castoro si sono spesi 198 ducati, bisogna spenderne 385 per 35 canne.

166. Non dissimile dalla precedente questione sarebbe la seguente: quanto dee rendere, dopo un anno, un capitale di 1325 ducati, impiegato al  $5 \frac{1}{2}$  per 100 ( che si suole scrivere  $5 \frac{1}{2}$  p.  $\frac{2}{2}$  )? Mettiamo il problema nella solita forma.

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| Capitale .. 1 ...  | 100             |
| Capitale .. 2 ...  | 1325            |
| Interesse .. 1 ... | $5 \frac{1}{2}$ |
| Interesse .. 2 ... | x.              |

Ragionando come nel problema precedente, chiaramente si scorge, che più grande è il capitale, più dee rendere d'interesse; e quanto più picciolo è il capitale, tanto meno dee rendere d'interesse: onde

$$100: 1325:: 5 \frac{1}{2}: x.$$

Moltiplicando 1325 per  $5 \frac{1}{2}$ , ossia per  $\frac{11}{2}$ , e dividendo il prodotto  $\frac{14575}{2}$  per 100, avremo per quarto proporzionale  $\frac{14575}{200}$ ; e facendo la divisione del numeratore pel denominatore, per varne gli interi, sarà un tal quarto proporzionale  $72 \frac{175}{200}$  ossia  $72 \frac{7}{8}$ , riducendo la frazione  $\frac{175}{200}$  alla più semplice espressione con dividerne amendue i termini per 25. Sicchè un capitale di 1325 ducati, impiegato al  $5 \frac{1}{2}$  p.  $\frac{2}{2}$ , dee rendere, dopo un anno, ducati  $72 \frac{7}{8}$ . Questa regola suol chiamarsi *regola d'interesse semplice*.

167. Finiamo con quest'altra questione: un uomo che ha una lettera di cambio di 1400 ducati a tirare sopra un banchiere, in un anno, avendo bisogno di danaro, lo prega di scontargliela all'istante, offrendosi di pagare l'interesse che monta al 6 p.  $\frac{2}{3}$  all'anno; quanto il banchiere dee pagare? Questa regola che si chiama *regola di sconto semplice*, si risolve come la precedente. Ed in vero, più grandi sono i capitali più ancora lo è lo sconto: dunque il rapporto degli sconti è uguale a quello de' capitali corrispondenti; e perciò  $100 : 1400 :: 6 : x$ , ovvero, dividendo per 100 i termini della prima ragione, sarà  $1 : 14 :: 6 : x$ , quindi  $x$  varrà 84 ducati, che il banchiere dee prelevare sopra i 1400 ducati; ond'egli non dovrà pagare che 1316 ducati.

168. Or se colui che dovea esigere la lettera di cambio, avesse pregato il banchiere di scontargliela dopo tre mesi, allora bisogna ridurre l'interesse al mese, cioè ad  $\frac{2}{3}$  p.  $\frac{2}{3}$  al mese; e quindi per 9 mesi, l'interesse sarebbe stato  $\frac{2}{3}$  p.  $\frac{2}{3}$ . Laonde bisognerà stabilire la seguente proporzione:

$$100 : 1400 :: \frac{2}{3} : x, \text{ ovvero}$$

$$1 : 14 :: \frac{2}{3} : x.$$

E trovando alla solita maniera il quarto proporzionale, questo sarà  $\frac{14}{9}$  ossia 63 ducati: onde prelevando una tal somma sopra i 1400 ducati, il banchiere non dovrà pagare che 1337 ducati.

*Della regola del tre semplice ed inversa.*

169. Proponiamoci una questione, sulla quale faremo de' ragionamenti, come abbiamo fatto nella regola precedente, acciocchè conoscer si possa se la questione proposta appartenga alla regola del tre inversa, e come convenga stabilirne la porzione.

Supposto che 13 operai abbiano impiegato 15 giorni, per fare un dato lavoro, si cerca il tempo che impiegherebbero 25 operai a fare il lavoro medesimo.

|                     |    |
|---------------------|----|
| Operai .... 1 ..... | 13 |
| Operai .... 2 ..... | 25 |
| Giorni .... 1 ..... | 15 |
| Giorni .... 2 ..... | x. |

Intendendosi e che le due truppe di operai abbiano la medesima forza, e che lavorino pel medesimo numero di ore al giorno, è chiaro, che quanto maggiore è il numero di operai, tanto minor numero di giorni vi abbisogna per compiere un dato lavoro; ed al contrario, quanto minore è il numero di operai, tanto maggior tempo si richiede. Dunque la ragione de' due numeri di operai è inversa a quella de' giorni; e perciò

$$25 : 13 :: 15 : x.$$

Dividendo i due antecedenti per 5, avremo 5

e 3: in tal modo la proporzione scritta qui sopra , ridotta a maggior semplicità , addiviene  
 $5: 13:: 3: x$ .

Trovando questo quarto proporzionale con dividere il prodotto di 13 per 3 , cioè 39 , per 5 , sarà il richiesto numero de' giorni  $7 \frac{4}{5}$ ; e riducendo la frazione  $\frac{4}{5}$  di giorno ad ore e minuti , il tempo addimandato si comporrà di 7 giorni , 19 ore e 12 minuti.

170. Essendo il rapporto del piede parigino al palmo napoletano come 1440 : 1169 , si vuol sapere a quanti palmi napoletani si riduce una lunghezza di  $15 \frac{1}{4}$  piedi parigini.

Essendo il piede parigino maggiore del palmo napoletano , una data lunghezza conterrà meno piedi parigini che palmi napoletani ; e ne conterrà tanto meno , per quanto quello è maggior di questo ; quindi il rapporto dovendo essere reciproco , si stabilirà la seguente proporzione :

$$1169: 1440:: 15 \frac{1}{4}: x.$$

Questo quarto proporzionale essendo trovato con la regola ordinaria , farà conoscere che  $15 \frac{1}{4}$  piedi parigini fanno 18 palmi , 6 onces e 4 minuti circa.

171. Un rettore di un collegio ha sostenuto , per 6 mesi , 80 convittori con 144 tomoli di farina : si dimanda , per quanto tempo egli avrebbe potuto sostenere 224 convittori colla stessa quantità di farina ?

Ragionando come nel problema dell' articolo

169, si rileva, che il rapporto de' convittori è reciproco a quello dei mesi; onde  $224:80::6:x$ ; ovvero dividendo per 16 i termini del primo rapporto, sarà  $14:5::6:x$ , e dividendo ancor per 2 gli antecedenti 14 e 6, sarà  $7:5::3:x$ .

Da questo quarto proporzionale si conoscerà che il tempo richiesto è di mesi  $2\frac{2}{3}$ .

172. Vogliasi sapere il rapporto tra due specie di moneta, supponiamo, tra una lira sterlina ed un ducato napoletano; bisognerà prima vedere quanto queste specie valgano, essendo paragonate ad una medesima specie. Or una lira sterlina valendo a Parigi 22 franchi e  $\frac{2}{3}$ , ed un ducato napoletano 4 franchi e  $\frac{1}{2}$ , se questi due valori si riducono ad una medesima specie, cioè a franchi, avremo la seguente proporzione:

1 lira ster.: 1. duc. nap.: :  $22\frac{2}{3}:4\frac{1}{2}$ :

oppure riducendo gl' interi e le frazioni a sole frazioni,

1 lira ster.: 1 duc. nap.: :  $\frac{136}{3}:\frac{9}{2}$ .

Moltiplichiamo i termini del secondo rapporto per 35, avremo 800 e 154; dividiamoli ancor per 2, avremo 400 e 77; tal che la dianzi scritta proporzione addiverrà

1 lir. ster.: 1 duc. nap.: : 400: 77.

Uguagliando il prodotto de' termini estremi a quello de' medii, si vede che 77 lire sterline valgono 400 ducati napoletani: mercè questo rapporto, si potrà cangiare una somma di lire sterline in ducati napoletani, e reciprocamente.

Supponiamo volersi sapere quanti ducati napoletani fa la somma di 1524 lire sterline; stabiliremo questa regola del tre:

$$77 : 400 :: 1524 : x,$$

il quale ne indica che 1524 lire sterline si riducono a 6877  $\frac{1}{77}$  ducati napoletani.

Che se dimandisi, una somma di 1524 ducati napoletani a quante lire sterline equivale? faremo quest'altra proporzione:

$$400 : 77 :: 1524 : x,$$

ovvero dividendo per 4 i due antecedenti,

$$100 : 77 :: 331 : x.$$

Un tal quarto proporzionale ne farà vedere, che 1524 ducati napoletani si riducono a 254, 87 lire sterline.

*Della regola del tre composta e diretta.*

173. Applichiamo le proporzioni alla regola del tre composta, così nominata, perchè in effetti essa si compone del prodotto di più ragioni semplici. Si vedrà or ora che le regole del tre, per quanto complicate sieno, si riducono alla fine alla regola del tre semplice.

Per cavare 64 palmi cubici di terreno si sono impiegati, per 6 giorni, 21 zappatori: si do-

manda il numero de' palmi cubici che si sarebbero cavati, in 12 giorni, da 63 zappatori; ponendo però che tutti gli zappatori abbiano la medesima forza, che lavorino per lo medesimo numero di ore al giorno, e che trovino la medesima durezza nel terreno.

Mettiamo prima in prospetto i dati della questione.

|                        |    |
|------------------------|----|
| Zappatori .... 1 ..... | 21 |
| Zappatori .... 2 ..... | 63 |
| Giorni..... 1 .....    | 6  |
| Giorni..... 2 .....    | 12 |
| Palmi. .... 1 .....    | 64 |
| Palmi..... 2 .....     | x. |

Or supponendo per poco che il tempo del travaglio sia lo stesso, la prima quantità de' palmi cubici sarà maggiore o minore della seconda, a proporzione che il numero de' primi zappatori sarà maggiore o minore di quello de' secondi. Di poi supponendo che il numero degli zappatori sia lo stesso, la prima quantità de' palmi cubici sarà eziandio maggiore o minore della seconda, a proporzione che il primo tempo è maggiore o minore del secondo. Sicchè la ragione de' palmi cubici è composta dalla ragion diretta in cui sono gli zappatori, e dalla diretta in cui sono i giorni; perciò sarà

$$64 : x :: ( 21 : 63 ) ( 6 : 12. )$$

Eseguiamo la ragion composta, giusta l'art. 151, avremo

$$64 : x :: 126 : 756$$

Dividendo per 126 i termini della seconda ragione , cioè 126 e 756 , otterremo 1 e 6 ; sostituendo questi valori , e mutando il luogo delle ragioni , affinchè  $x$  sia nel quarto posto , la proporzione addiverrà

$1 : 6 :: 64 : x$  , il quale  $c'$  indica che il numero de' richiesti palmi cubici è 384.

174. Per mantenere accese 7 lampade , per ore  $5 \frac{1}{2}$  al giorno , per 9 giorni , si sono consumate 24 libbre di olio ; si cerca sapere quante libbre di olio si sarebbero consumate , per tenero accese 12 lampade , per ore  $3 \frac{1}{2}$  al giorno , per 13 giorni.

|             |   |       |                 |
|-------------|---|-------|-----------------|
| Lampade...  | 1 | ..... | 7               |
| Lampade...  | 2 | ..... | 12              |
| Ore.....    | 1 | ..... | $5 \frac{1}{2}$ |
| Ore.....    | 2 | ..... | $3 \frac{1}{2}$ |
| Giorni..... | 1 | ..... | 9               |
| Giorni..... | 2 | ..... | 13              |
| Libbre..... | 1 | ..... | 24              |
| Libbre..... | 2 | ..... | $x$ .           |

Questa regola racchiude sette termini , oltre 1 termine ignoto che si cerca. Un breve ragionamento ci condurrà alla soluzione di essa , ragionamento , che si può altresì applicare alla question precedente la quale di questa è meno intralciata. Il primo numero delle libbre di olio sarà mag-

giore o minore del secondo, a misura che il numero delle prime lampade, delle prime ore e de' primi giorni sarà maggiore o minore del numero delle seconde lampade, delle seconde ore e de' secondi giorni: onde sarà

$$24 : x :: (7 : 12) (5 \frac{1}{3} : 3 \frac{1}{3}) (9 : 15) \text{ ovvero} \\ 24 : x :: (7 : 12) (\frac{11}{3} : \frac{10}{3}) (9 : 15).$$

Paragonando il prodotto degli antecedenti a quello de' conseguenti, per ottenere la ragione composta, e cambiando il luogo delle ragioni, acciocchè  $x$  sia nel quarto posto, sarà

$$\frac{693}{1} : \frac{1560}{1} :: 24 : x.$$

Siccome 1560 è divisibile per 3, si avrà 520; e se moltiplichinsi per 2 i termini del primo rapporto, si avrà 693 e 1040; e se finalmente dividansi per 3 i due antecedenti, si avrà 231 e 8: onde sostituendo questi valori, la proporzione, ridotta alla maggior semplicità, addivene

$$231 : 1040 :: 8 : x.$$

Il quale ne indica che le cercate libbre di olio sono  $36 \frac{4}{1040}$ .

175. Ecco un'altra questione su la quale faremo tutte le riduzioni possibili, acciocchè i giovani si avvezzino a far dipendere la soluzione di un problema da una proporzione condotta al suo massimo grado di semplicità.

Per adornare di carta dipinta un appartamento di 5 stanze si sono spesi 260 ducati; si vuol sapere con quanti ducati si può adornare un appartamento di 9 stanze: si suppone che le larghezze delle stanze del primo appartamento e le larghezze di quelle del secondo sono tra loro come  $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ ; che le lunghezze sono come  $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$ ; e finalmente che le altezze sono come  $\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$ ; si suppone ancora che sebbene tutte le strisce di carta abbiano le medesime dimensioni, nondimeno, per la varietà del colore e del disegno, il prezzo delle prime è a quello delle seconde come  $2\frac{1}{8} : 4\frac{1}{4}$ .

Disponiamo le grandezze date, come qui sotto, per averle tutte in un punto di veduta.

$$\begin{array}{rcl}
 5 & : & 9 \\
 \frac{2}{3} & : & \frac{3}{4} \\
 \frac{3}{4} & : & \frac{4}{5} \qquad : : 260 : x \\
 \frac{4}{5} & : & \frac{5}{7} \\
 2\frac{1}{8} & : & 4\frac{1}{4}
 \end{array}$$

Paragonando il rapporto delle due spese, cioè 260 ducati a quelli che si cercano, co' rapporti de' termini di specie differente, diciamo: più sono le stanze, più sarà la spesa; più le stanze sono larghe, più sarà la spesa; più le stanze sono lunghe, più sarà la spesa; più sono alte, più sarà la spesa; più il prezzo di ciasuna striscia di carta dipinta, più sarà la spesa. Dunque le due spese sono in ragion composta dai rapporti diretti che hanno fra loro i termini di specie differente. Premesso ciò, ecr-

★

chiamo di ridurre i termini di questi rapporti: incominciamo a fare sparire le frazioni. Per le prime, basta di moltiplicare il numeratore dell'una per lo denominatore dell'altra; quindi  $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$  non è altra cosa che  $8 : 9$ ;  $\frac{3}{4} : \frac{1}{5}$  vale quanto  $15 : 32$ ;  $\frac{4}{5} : \frac{1}{7}$  è lo stesso che  $7 : 10$ . Quanto ai termini dell'ultimo rapporto componente, essendo essi interi uniti a frazioni, riduciamoli a frazioni; indi moltiplichiamo il numeratore di ciascuna per lo denominatore dell'altra, ciò che in vece di  $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{2}$ , ci dà  $52 : 114$ . Sostituendo questi rapporti ai primi, avremo

|                  |                     |
|------------------|---------------------|
| 5: 9             | 1: 5                |
| 8: 9             | 1: 9                |
| 15: 32 :: 260: x | 5: 1 :: 260: x      |
| 7: 10            | 7: 2                |
| 52: 114          | 13: 114             |
|                  | 455: 6156 :: 260: x |

Ecco dunque la presente questione ridotta a non avere per suoi termini che degl'interi. Bisogna ancor vedere se tra i termini della prima colonna e quelli della seconda non vi sieno de' comuni divisori, perciocchè questi si potranno suppressere, senza che si alteri il rapporto tra il prodotto degli antecedenti e quello de' conseguenti. Or si vede primieramente esser 5 nella prima colonna e 10 nella seconda; quindi si può suppressere il comune divisore 5, ed in vece di 5 e 10, si può scrivere 1 e 2. Inoltre essendo

52 uguale a 13 moltiplicato per 4, vi ha nella prima colonna 8 e 4 il cui prodotto è 32 che si trova parimenti nella seconda colonna; supprimendo questo fattore, in vece di 8, 52 e 32, si scriverà 1, 13 ed 1. Finalmente 15 e 9 hanno per comune divisore 3; onde in vece loro si metterà 5 e 3. In tal modo il prodotto de' termini che restano nella prima colonna è 455, e quello de' termini della seconda 6156; ond'è che il problema si risolverebbe con questa proporzione,  $455 : 6156 :: 260 : x$ . Ma per ridurre la questione al massimo grado di semplicità, supprimiamo nella prima colonna 65, che è il prodotto di 13 per 5, e dividiamo per 65 l'altro antecedente 260; saranno 7 e 4 i due antecedenti. Adunque la questione da noi proposta si riduce a trovare il quarto termine della proporzione  $7 : 6156 :: 4 : x$ , il quale denota che la seconda spesa è  $\frac{11614}{7}$  ossia 3517  $\frac{1}{7}$  ducati.

176. Coi medesimi principii, e colle medesime operazioni, si risolvono le regole d'*interesse e di sconto*, che noi chiameremo *composte*, perchè in effetti dipendono dalla regola del tre composta. Vediamo le prime.

Quanto renderà, dopo 5 mesi e 20 giorni, un capitale di 3650 ducati, impiegato al  $7 \frac{1}{4}$  per  $\frac{1}{2}$  all'anno?

$$\begin{array}{rcl} 100 : 3650 & & \\ 12 : 5\frac{1}{4} & :: & 7\frac{1}{4} : x \end{array}$$

Poichè noi cerchiamo l'interesse, mettiamo

per termini dell'ultimo rapporto l'interesse noto  $7\frac{1}{4}$ , e l'interesse che si richiede  $x$ ; indi diciamo: più i capitali son grandi, più l'interesse è grande; più il tempo è lungo, più l'interesse è grande. Dunque gl'interessi sono fra loro in ragion composta dalla diretta de' capitali, e da quella de' tempi. Prima però di stabilire la proporzione, vediamo di ridurla a maggior semplicità. Togliamo uno zero da 100 e da 5630, ciò che cangerà il primo rapporto in  $10 : 563$ ; in vece di 5 mesi e 20 giorni, scriviamo mesi  $5\frac{2}{3}$ , e riduciamo  $5\frac{2}{3}$  in frazione che sarà  $\frac{17}{3}$ : allora moltiplicando i due termini del rapporto  $12 : \frac{17}{3}$  per 3, otterremo  $36 : 17$ ; finalmente riduciamo  $7\frac{1}{4}$  alla frazione  $\frac{29}{4}$ . Sostituendo questi valori, la regola soprascritta addiverrà.

$$\begin{array}{rcl} 10 & : & 563 \\ 36 & : & 17 \\ \hline \text{ovvero} & 560 : & 6171 :: \frac{29}{4} : x. \end{array}$$

Un tal quarto proporzionale, trovato col metodo ordinario, dà per l'interesse cercato  $\frac{112959}{11440}$  ossia 12 $\frac{1}{2}$  ducati, 2 carlini, 7 grani, e cavalli  $8\frac{1}{2}$ .

Che se fosse fatta questa dimanda: un capitale di 2420 ducati, essendo divenuto, dopo 8 mesi, 2508  $\frac{11}{11}$  ducati, a quanto per  $\frac{2}{3}$  all'anno è stato impiegato? Siccome 2508  $\frac{11}{11}$  contengono il capitale 2420 e gl'interessi, per aver questi, fa d'uopo sottrarre 2420 da 2508  $\frac{11}{11}$ ; il resto 88  $\frac{11}{11}$  esprime gl'interessi. Allora dovremo operare come qui segue:

$$\begin{array}{rcl} 2420 : 100 & : : & 88 \frac{1}{3} : x \\ 8 : 12 \end{array}$$

cioè a dire , abbiamo posto pei termini dell' ultimo rapporto l' interesse noto e quello che si cerca , scrivendo  $88 \frac{1}{3} : x$ ; indi ragionando , come nel probl. precedente , ci accorgeremo essere i due interessi in ragion composta dalla diretta de' capitali , e da quella de' tempi ; ma prima di giugnere alla proporzione vi sono molte riduzioni a fare. Primieramente si può togliere uno zero a 2420 e a 100 , e ciò che resta essendo divisibile per 2 , in vece di 2420 : 100 , scriveremo 121 : 5 ; inoltre il rapporto di 8 : 12 equivale a quello di 2 : 3 ; e finalmente  $88 \frac{1}{3}$  ridotto a frazione , è  $\frac{1331}{3}$ . Per la qual cosa sostituendo questi valori , la regola succennata addivienne

$$\begin{array}{rcl} 121 : 5 & : : & \frac{1331}{3} : x \\ 2 : 3 \end{array}$$


---

ovvero  $242 : 15 \quad : : \quad \frac{1331}{3} : x$

E poichè per rinvenire  $x$  , bisogna moltiplicare  $\frac{1331}{3}$  per 15 , e dividerne il prodotto per 242 , qui basta dividere 1331 per 242 , essendo 1331 moltiplicato e diviso per 15. Ciò fatto , si troverà , per l' interesse cercato ,  $5 \frac{1}{3}$  ducati.

177. Passiamo alle regole di sconto composte. Sia dunque proposta la presente questione: un

particolare mette presso un banchiere una certa somma , per la quale , compresi gl'interessi al  $3 \frac{1}{2}$  per  $\frac{2}{3}$  all'anno , dovrebbe esigere dopo un anno ducati  $2451 \frac{1}{11}$  ; ma dopo 9 mesi avendo bisogno del suo danaro , prega il banchiere di pagarglielo , offrendosi di scontare gl'interessi pei 5 mesi rimanenti : si dimanda la somma che il banchiere dee pagargli.

Troveremo lo sconto ragionando nella seguente maniera: come  $103 \frac{1}{3}$  ducati contengono il capitale 100 e gl'interessi  $3 \frac{1}{3}$  , così  $2451 \frac{1}{11}$  contengono il capitale e gl'interessi ignoti ; quindi otterremo questi interessi facendo la proporzione  $103 \frac{1}{3}$  :

$$2451 \frac{1}{11} : 3 \frac{1}{3} : x, \text{ che sarà uguale a } \frac{2451 \frac{1}{11} \text{ mol. per } 3 \frac{1}{3}}{103 \frac{1}{3}}$$

nella quale espressione abbiamo gl'interessi per un anno. Dunque per trovare quelli di 3 mesi non dovremo fare che quest' altra proporzione:

$$12 : 3 : : \frac{2451 \frac{1}{11} \text{ mol. per } 3 \frac{1}{3}}{103 \frac{1}{3}} : x, \text{ che equivale a } \frac{3 \text{ mol. per } 2451 \frac{1}{11} \text{ mol. per } 3 \frac{1}{3}}{12 \text{ mol. per } 103 \frac{1}{3}}$$

Dal che si vede, che per avere lo sconto cercato, bisogna moltiplicare l'interesse noto  $3 \frac{1}{3}$  per le frazioni  $\frac{1}{11}$  e  $\frac{2451 \frac{1}{11}}{103 \frac{1}{3}}$ , ossia pei rapporti  $12 : 3$  e

$103 \frac{1}{3} : 2451 \frac{1}{11}$  ; lo che si ottiene per mezzo della regola del tre composta.

$$\begin{array}{l} 12 : 5 \\ 103\frac{1}{2} : 2451\frac{1}{2} \end{array} \quad :: 3\frac{1}{2} : x$$

oppure

$$\begin{array}{l} 12 : 3 \\ 110 : 26746 \end{array} \quad :: \frac{10}{1} : x$$

Intanto il rapporto di 12 : 3 si riduce a quello di 4 : 1 ; e si può scrivere 2 nella prima colonna, in vece di 4, scrivendo però nella seconda  $\frac{11111}{11}$  in vece di  $\frac{26746}{11}$  ; si possono moltiplicare per 5 i termini della frazione  $\frac{110}{11}$ , ciò che dà  $\frac{550}{11}$  ; allora i termini del secondo rapporto addiventeranno 1550 e 18383 ; finalmente si può togliere lo zero a 1550 ed a  $\frac{10}{1}$ . Per lo che sostituendo questi valori, la nostra regola, ridotta al massimo grado di semplicità, addivene

$$\begin{array}{l} 2 : 1 \\ 155 : 18383 \end{array} \quad :: \frac{1}{1} : x$$


---

ovvero  $\begin{array}{l} 310 : 18383 \end{array} \quad :: \frac{1}{1} : x$

Moltiplicando 18383 per  $\frac{1}{1}$ , e dividendo il prodotto  $\frac{18383}{1}$  per 310, avremo 19  $\frac{713}{310}$  ducati per lo sconto che il banchiere dee prelevare su la somma 2451  $\frac{1}{2}$  ; sottraendo dunque da questa somma 19  $\frac{713}{310}$  ducati, avremo 2431  $\frac{1}{2}$  ducati, ossia 2451 duc. e tre carlini, per la somma, che il banchiere dee pagare.

178. Da ciò che si è detto, si rileva: 1.° che le regole dello sconto composte si risolvono come le regole del tre composte, in cui i termini del secondo rapporto sono l'interesse noto e lo sconto

che si cerca; ed i termini del primo rapporto sono i prodotti dei capitali uniti agl'interessi moltiplicati rispettivamente pei tempi relativi agl'interessi del secondo rapporto : 2.° che vi è una grande analogia tra la regola d'interesse composta e quella di sconto composta; e che la sola differenza consiste in ciò che nella prima i soli capitali entrano nella ragion composta, laddove nella seconda, s'impiegano i capitali uniti agl'interessi.

Se dunque venisse fatta la presente questione: si è posta presso un negoziante una certa somma al 4 per  $\frac{2}{3}$  all'anno, e si dovrebbe esigere dopo un anno 1268  $\frac{4}{5}$  ducati; ma dopo 5 mesi si vuol ritirare il danaro, si dimanda: il negoziante quanto dee pagare? Non abbiamo a fare che la seguente proporzione :

$$( 104 : 1268 \frac{4}{5} ) ( 12 : 5 ) :: 4 : x$$

ovvero

$$( 1248 : 6344 ) :: 4 : x.$$

La proporzione si può rendere molto più semplice dividendo i termini del primo rapporto per 8, e poi i due antecedenti per 4; tal che essa addiviene 39 : 793 :: 1 : x, il quale è  $\frac{793}{39}$ , ossia ducati 20  $\frac{4}{5}$ ; onde prelevando questa somma da 1268  $\frac{4}{5}$ , il resto 1248  $\frac{7}{15}$  ducati è la somma che dal negoziante dee pagarsi.

179. Finiremo con far vedere che alla regola del tre composta si riduce quella che suol chiamarsi *regola congiunta*, e della quale si fa grande uso nel commercio.

Sia proposta la seguente questione: per 4 ducati napoletani si esigono in Francia 19 franchi; 22 franchi valgono 1 lira sterlina ossia 240 denari sterlini; 240 denari sterlini pareggiano 405 grossi di Olanda; 40 grossi di Olanda fanno 1 fiorino di Olanda; e 5 fiorini fanno 2 risdale; dippiù il cambio di Olanda con Berlino è a 145, cioè che per 100 risdale di Olanda si ricevono a Berlino 145 risdale, si dimanda il numero delle risdale che si esigeranno a Berlino per 1260 ducati di Napoli.

Perciocchè 4 ducati di Napoli valgono in Francia 19 franchi, 1 ducato varrà  $\frac{19}{4}$  di franco; e 22 franchi valendo 240 denari sterlini, 1 franco sarà  $\frac{240}{22}$  di denaro sterlino; onde 1 ducato di Napoli sarà uguale a  $\frac{19}{4}$  di  $\frac{240}{22}$  di danaro sterlino. Inoltre essendo 240 denari sterlini uguali a 405 grossi di Olanda, 1 denaro sterlino varrà  $\frac{405}{240}$  di grosso, e quindi 1 ducato Napoletano sarà  $\frac{19}{4}$  di  $\frac{240}{22}$  di  $\frac{405}{240}$  di grosso; ma il grosso di Olanda è  $\frac{1}{40}$  di fiorino, ed 1 fiorino  $\frac{2}{5}$  di risdala; dunque 1 ducato napoletano sarà  $\frac{19}{4}$  di  $\frac{240}{22}$  di  $\frac{405}{240}$  di  $\frac{1}{40}$  di  $\frac{2}{5}$  di risdala di Olanda. Finalmente essendo 1 risdala di Olanda a 1 risdala di Berlino come 100 : 145, e quindi 1 risdala di Olanda uguale a  $\frac{145}{100}$  di risdala di Berlino; sarà 1 ducato di Napoli uguale a  $\frac{19}{4}$  di  $\frac{240}{22}$  di  $\frac{405}{240}$  di  $\frac{1}{40}$  di  $\frac{2}{5}$  di  $\frac{145}{100}$  di risdala di Berlino. Adunque se questi frazioni di frazioni si riducano, giusta l'art. 77, ad una sola frazione, e si moltiplichino per essa il numero 1260, il prodotto ci darà il numero delle risdale che si esigeranno, in Berlino, per 1260 ducati di Napoli.

Ma possiamo giungere al medesimo risultamento per mezzo della regola del tre composta, scrivendo i rapporti componenti come qui sotto si può vedere.

|                 |   |                    |         |
|-----------------|---|--------------------|---------|
| 4 duc.          | : | 19 franc.          |         |
| 22 franc.       | : | 240 den. ster.     |         |
| 240 den. ster.  | : | 405 gros. olan. :: | 1260: x |
| 40 gros. olan.  | : | 1 fior olan.       |         |
| 5 fior. olan.   | : | 2 risd. olan.      |         |
| 100 risd. olan. | : | 145 risd. berlin.  |         |

.....

|    |   |       |       |
|----|---|-------|-------|
| 4  | : | 19    |       |
| 11 | : | 1     |       |
| 1  | : | 81 :: | 63: x |
| 8  | : | 1     |       |
| 1  | : | 1     |       |
| 5  | : | 29    |       |

Prima però di stabilire la proporzione da cui dipende la soluzione del problema, giova ridurre i rapporti componenti. Si può cancellare 240 dalla prima e seconda colonna, ed in vece loro scrivere 1; si può mettere 11 nella prima colonna, in vece di 22, purchè nella seconda si ponga 1 in luogo di 2; si può mettere 81 nella seconda colonna, in vece di 405, scrivendo nella prima 1 in luogo di 5; parimenti si porrà 8 nella prima colonna, in vece di 40, e nella seconda 29 in vece di 145, essendo 8 e 29 i quoti di 40 e 145 divisi pel comune divisore 5; finalmente si può togliere o a 100 e a 1260, e

( 173 )

dividere i resti per 2; ond'è che si può scrivere 5 nella colonna degli antecedenti, in vece di 100, e 63, in vece di 1260. Il calcolo così ridotto può vedersi qui innanzi. Ora moltiplicando i termini rimasti nella prima colonna, e quelli della seconda, avremo per la soluzione del problema la seguente proporzione:

$$1760 : 44651 : 63 : x,$$

da cui si rileva che per 1260 ducati di Napoli si esigono in Berlino 1597  $\frac{1760}{1760}$  risdale.

180. Soggiungiamo anche un altro problema desunto dall'algebra di Eulero, affinchè i giovani si avvezzino a stabilire i rapporti componenti, ed a farvi le dovute riduzioni. Si fanno venire a Lipsia de' ducati di Amsterdam, e, secondo il corso del cambio, 5 ducati valgono 266 fiorini Olandesi: *Pagio di Banco* ad Amsterdam è a 5 per  $\frac{1}{2}$ , cioè a dire che 105 correnti fanno 100 di Banco, e che il cambio di Lipsia ad Amsterdam, in danaro di Banco, è a 133  $\frac{1}{4}$  per 100, cioè che per 100 risdale si pagano a Lipsia 133  $\frac{1}{4}$  risdale, e quindi per 400 risdale 533; finalmente 2 risdale di Olanda facendo 5 fiorini di Olanda, si domanda, quante risdale, secondo questi cambii, bisogna pagare a Lipsia per 100 ducati?

|       |     |           |      |          |
|-------|-----|-----------|------|----------|
| 5 :   | 26  |           | 1 :  | 26       |
| 105 : | 100 |           | 21 : | 1        |
| 5 :   | 2   | :: 1000 : | 1 :  | 2 :: 2 : |
| 400 : | 533 |           | 1 :  | 533      |

Dopo avere seritto i rapporti componenti come si sono enunciati nel problema , cerchiamo di renderne il calcolo più semplice per mezzo delle riduzioni. Noi metteremo 1 e 1 nella prima colonna, in vece di 5 e 5. il cui prodotto è 25 , e pel quale si può dividere 100 che si trova nella seconda colonna ; e sebbene il quoto di 100 per 25 sia 4 , noi scriveremo .1 , ponendo però 100 in vece di 400 che stà nella prima colonna ; anzi in vece di 100 scriveremo 1 togliendo anche 2 zeri a 1000 , antecedente dell' ultimo rapporto ; finalmente divideremo per 5 tanto 105 che è nella prima colonna , quanto 10 che era divenuto l' antecedente dell' ultimo rapporto : in tal modo il calcolo si rende molto più semplice, come qui innanzi a dritta si può vedere. Eseguendo la moltiplicazione de' termini della prima colonna , e di quelli della seconda , avremo

21: 27716 :: 2 : x , che si trova uguale a  $\frac{11412}{11}$  risdale, ossia 2639  $\frac{12}{11}$  risdale.

*Della regola del tre composta ed inversa.*

181. Ci contenteremo solamente, in questa regola, di arrecare due esempi per fare apprendere ai giovani come si debbano condurre, allorchè nella composizione de' rapporti entrano di quelli, che sono reciproci al rapporto che ha il termine noto a quello che si cerca.

Sia primieramente proposta la seguente questione: si sono cavati 124 palmi cubici di ter-

reno da 22 zappatori, in 15 giorni; si dimanda il tempo in cui si sarebbero cavati da 12 zappatori 150 palmi di terreno; si suppone ancora che la forza dei primi sia a quella de' secondi come 3: 2, e che la durezza del primo terreno sia a quella del secondo come 5: 4.

Scriviamo qui sotto tutti i dati del problema, in modo che due consecutivi siano sempre omogenei tra loro.

|               |   |       |     |
|---------------|---|-------|-----|
| Zappatori.... | 1 | ..... | 22  |
| Zappatori.... | 2 | ..... | 12  |
| Palmi.....    | 1 | ..... | 124 |
| Palmi.....    | 2 | ..... | 150 |
| Forza.....    | 1 | ..... | 5   |
| Forza.....    | 2 | ..... | 2   |
| Durezza.....  | 1 | ..... | 5   |
| Durezza.....  | 2 | ..... | 4   |
| Giorni.....   | 1 | ..... | 15  |
| Giorni.....   | 2 | ..... | x.  |

Non dobbiamo far altro che paragonare ciascun rapporto di due termini omogenei col rapporto che ha il tempo noto 15 giorni al tempo che si cerca x, dicendo: più zappatori, meno tempo; più palmi di terreno a cavare, più tempo; più forza ne' zappatori, meno tempo; più durezza nel terreno, più tempo.

Dunque la ragion de' tempi si compone dalla diretta de' palmi di terreno, dalla diretta delle durezze di questo, dalla reciproca del numero de' zappatori e dalla reciproca delle loro forze; quindi cambiando ne' rapporti reciproci, gli au-

tecedenti in conseguenti, li scriveremo nel seguente modo:

$$\begin{array}{rcl}
 12 & : & 22 \\
 124 & : & 150 \\
 2 & : & 3 :: 15 : x \\
 5 & : & 4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 1 & : & 11 \\
 62 & : & 15 \\
 1 & : & 1 :: 15 : x \\
 1 & : & 1
 \end{array}$$

Ma prima di stabilire la proporzione da cui dee dipendere il quarto termine  $x$ , cerchiamo di fare tutte le possibili riduzioni. Osserviamo 5 e 4 nella seconda colonna il cui prodotto è 20, il qual numero si trova ancora nella prima; onde in vece loro scriveremo 1, e 1. Osserviamo 2 e 5, nella prima colonna il cui prodotto è 10, pel qual numero è divisibile 150 della seconda colonna: perciò nella prima colonna, in vece di 2 e 5, porremo 1 e 1, e nella seconda, in vece di 150, porremo 15; finalmente 124 e 22 si possono dividere per 2, onde in vece loro porremo 62 e 11. Il calcolo ridotto al suo massimo grado di semplicità si può vedere qui sopra a dritta. Ora moltiplicando i termini della prima colonna, e quelli della seconda, si ottiene la proporzione  $62:165::15:x$ ; da cui si rileva essere il tempo cercato  $39 \frac{57}{62}$  giorni, ossia 1 mese, 9 giorni, 22 ore e poco meno di 4 minuti.

182. In una biblioteca s'impiegano due sezioni di scrittori per copiare de' manuscritti; i primi, al numero di 10, travagliando 4 ore al giorno, hanno speso 16 giorni per trascrivere un vol. in 4.<sup>a</sup> di 460 pagine, ogni pagina avendo

40 linee, ed ogni linea, l'una per l'altra, 56 lettere: si dimanda in quanti giorni i secondi scrittori, al numero di 18, travagliando 6 ore al giorno, possono copiare 1 vol. in *folio* di 780 pagine, ogni pagina avendo 72 linee, ed ogni linea, l'una per l'altra, 68 lettere; si suppone ancora che la difficoltà del carattere di cui si servono i primi è a quello di cui fanno uso i secondi come 4: 5

|                   |                |
|-------------------|----------------|
| 18 : 10           | 1 : 1          |
| 6 : 4             | 3 : 1          |
| 460 : 780         | 23 : 39        |
| 40 : 72 :: 16 : x | 1 : 1 :: 8 : x |
| 56 : 68           | 14 : 17        |
| 4 : 5             | 1 : 5          |

Perciocchè quanto maggiore è il numero dei copisti, tanto meno tempo abbisogna; e quanto più sono le ore che travagliano al giorno, anche tanto meno tempo si richiede, si vede chiaramente che questi due rapporti sono inversi al rapporto che ha il tempo 16 all'ignoto tempo x che si cerca; quindi abbiamo posto 18 : 10 e 6 : 4. Ma quanto più sono le pagine del manuscritto, le linee di ciascuna pagina e le lettere di ciascuna linea, tanto più tempo si richiede per copiarlo: dunque tutti questi rapporti sono diretti, e perciò abbiamo posto 460 : 780, 40 : 72 e 56 : 68. Finalmente più vi è di difficoltà nel carattere, e più bisogna di tempo; questo rapporto è ancor diretto, e perciò si è scritto 4 : 5. Ciò premes-

so, passiamo alle riduzioni: nella prima colonna vi è 18 e 4 il cui prodotto è 72, che si trova nella seconda colonna, noi possiamo cancellare questi numeri, oppure scrivere in vece loro 1, 1 e 1; nella seconda colonna vi è 10 e 4 il cui prodotto è 40 che si trova nella prima colonna, possiamo parimenti distruggere 10, 4 e 40, ovvero scrivere 1, 1 e 1: il rapporto di 460: 780 si riduce a quello di 23: 39, dividendone i termini per 20; ed il rapporto di 56: 68 addiverrà 14: 17, dividendone i termini per 4: finalmente nella prima colonna si scriverà 3, in vece di 6, ed in luogo dell' antecedente 16 si porrà 8. Dopo queste riduzioni, si moltiplichino i restanti termini nella prima e nella seconda colonna, avremo

$$966 : 3315 :: 8 : x,$$

ovvero, dividendo per 3 i termini del primo rapporto, sarà  $322 : 1105 :: 8 : x$ ,  
che si trova uguale a  $27 \frac{46}{115}$  giorni; ossia 27 giorni, 10 ore e poco meno di 55 minuti.

### *Della regola di allegazione.*

185. Passiamo alla regola di allegazione, così chiamata, perchè essendo dati il numero ed il prezzo di molte cose unite, si dimanda il prezzo di ogni unità di mescolanza.

Un cantiniere ha mischiato insieme 40 bottiglie di vino a 11 grani e 6 cavalli, 24 bottiglie a 13 gr. e 5 cav., 18 bottiglie a 15 gr. e 4 cav.,

e finalmente 4 bottiglie a 17 gr., e 9 cav.; si dimanda il prezzo di una bottiglia di vino mescolato.

Egli è chiaro che 40 bottiglie a gr. 11 e cav. 6 valgono 460 grani; che 24 bottiglie a gr. 13 e cav. 3 valgono 318 grani; che 18 bottiglie a gr. 15 e cav. 4 valgono 276 grani; e che finalmente 5 bottiglie a gr. 17 e cav. 9 valgono 71 grani: ora aggiungiamo insieme i quattro numeri di bottiglie ed i loro prezzi.

|              |           |
|--------------|-----------|
| 40 bottiglie | 460 grani |
| 24           | 318       |
| 18           | 276       |
| <u>4</u>     | <u>71</u> |
| 86           | 1125      |

Egli è evidente, che se 86 bottiglie di vino valgono 1125 grani, si troverà il prezzo di 1 bottiglia di vino che risulta dalla loro mescolanza, facendo questa proporzione:

86: 1 :: 1125: x, che si trova  $\frac{1125}{86}$  grani, ossia 15 grani e  $\frac{45}{86}$  di cavallo.

Sicchè per risolvere la regola di allegazione, bisogna separatamente trovare i prezzi di tutte quelle cose che entrano in mescolanza, ciò che si ottiene moltiplicando ogni specie pel prezzo rispettivo; indi aggiungere da un lato tutti questi prezzi, e dall'altro tutti i numeri delle cose; e finalmente dividere la prima somma per la seconda.

184. Si potrebbe proporre inversamente la que-

\*

stione, ma allora le specie non debbono essere che due; altrimenti si potranno avere infinite soluzioni, come nell'Algebra si dimostrerà. Sia dunque proposto il problema seguente: un mercante di vino ne ha due specie, una del prezzo 24 grani la bottiglia, l'altra del prezzo 15 grani; si dimanda, quanta parte egli dee mischiare dell'uno e dell'altro vino, acciocchè risulti una bottiglia del prezzo grani 18?

$$\begin{array}{l|l} 24 & 3 \dots \frac{1}{9} \text{ ossia } \frac{1}{9} \\ 18 & \\ 15 & 6 \dots \frac{2}{9} \dots \frac{2}{9} \end{array}$$

Egli è manifesto, che quanto maggiore è la differenza del prezzo del buon vino su quello che si cerca, tanto minor parte di buon vino entrar dee nella mescolanza, e reciprocamente. Il medesimo discorso si può adattare alla differenza del prezzo del vino cercato sul prezzo del vino d'inferior qualità. Dunque bisogna dividere l'unità nella ragione inversa delle differenze: che però la differenza di 24 sopra 18 essendo 6, si scriva 6 a lato del prezzo minimo; e la differenza tra 18 e 15 essendo 3, si scriva 3 a lato del prezzo massimo. Ciò ci fa scorgere, che dividendo 1 bottiglia in 9 parti uguali, bisogna mischiare  $\frac{1}{9}$  ossia  $\frac{1}{9}$  di bottiglia del vino ottimo, e  $\frac{2}{9}$  ossia  $\frac{2}{9}$  del vino infimo.

Ed in vero, valendo una bottiglia del miglior vino 24 gr.,  $\frac{1}{9}$  di bottiglia varrà gr. 8; e valendo una bottiglia del vino inferiore 15 gr.,

$\frac{2}{3}$  di bottiglia varranno gr. 10 : dunque tutta la bottiglia del vino misto varrà 18 grani.

185. La gravità specifica dell'oro, paragonata a quella dell'acqua distillata, è 19, 257; e la gravità specifica dell'argento 10, 474; supponiamo che la gravità specifica della corona di Gerone, Re di Siracusa, fosse stata 13, 142: si dimanda quanta lega di oro e di argento era nella corona del detto Re?

$$\begin{array}{l|l} \text{Gravità specifica dell'oro } 19, 257 & 2, 668 \frac{2.668}{2.781} \\ \text{della corona } 13, 142 & \\ \text{dell'argento } 10, 474 & 6, 115 \frac{6.115}{2.781} \end{array}$$

Essendo la differenza tra la gravità specifica dell'oro e quella della corona 6, 115, e tra la gravità specifica della corona e quella dell'argento 2, 658, si vede, che in ogni unità del peso della corona, in una libbra, per esempio, vi sarà  $\frac{2.668}{2.781}$  di oro, e  $\frac{6.115}{2.781}$  di argento. Ma in ciascuna di queste frazioni si può cancellare la virgola, poichè i due termini di ciascuna di esse verrebbero ad essere moltiplicati per 1000 (V. art. 90): dunque in ogni libbra del metallo della corona vi sarà  $\frac{2668}{2781}$  di oro, ossia o, 3038 circa (\*); e  $\frac{6115}{2781}$  di argento, ossia circa o, 6962.

---

(\*) Veramente la quantità dell'oro sarebbe presso a poco o, 3037 di libbra, ma noi diciamo o, 3038 per quel che abbiamo avvertito in fine dell'articolo 101.

*Della regola di società.*

186. Esaminiamo la regola di società ossia di compagnia, regola così chiamata, perchè per mezzo di essa si sa dividere tra molti associati il guadagno oppur la perdita proveniente dalla lor società.

Tre mercanti hanno fatto insieme un negozio; il primo ha posto ducati 650, il secondo 1300, ed il terzo 1500; hanno guadagnato ducati 540: si dimanda la parte del guadagno spettante a ciascuno.

Egli è chiaro che la parte del guadagno esser debbe proporzionale a ciò che ha posto ciascuno de' mercanti, e che l'intero guadagno 540 è stato prodotto dalla somma de' capitali, la quale è 3450. Dunque come la somma de' capitali al capitale di ciascuno, così stà il guadagno intero alla parte spettante a ciascuno. Dunque si troveranno le parti rispettive di lucro con le tre seguenti proporzioni:

$$3450: 650 :: 540: x$$

$$3450: 1300 :: 540: y$$

$$3450: 1500 :: 540: z$$

ovvero

$$25: 13:: 180: x \quad \text{ossia } 101\frac{1}{3} \text{ duc.}$$

$$25: 26:: 180: y \quad \text{ossia } 103\frac{1}{3} \text{ duc.}$$

$$25: 30:: 180: z \quad \text{ossia } 25\frac{1}{3} \text{ duc.}$$

187. Alle volte i capitali si tengono in socie-

ta per tempi differenti, ciò che dà luogo alla *regola di società composta*; ma con un breve ragionamento faremo vedere che essa si può ridurre alla *regola di società semplice*. Proponiamoci adunque la seguente questione: tre giuocatori hanno posto insieme, il primo 40 ducati, che sono stati per 3 ore in società; il secondo 60, che ci sono stati per 5 ore; ed il terzo 150, che ci sono stati per 7 ore; la fortuna del giuoco non è mai variata, e la perdita è stata 84 ducati: si dimanda la perdita di ciascuno.

Incominciamo ad osservare che 40 ducati, i quali sono stati per 3 ore in società, debbono riportare tanto di perdita quanto 3 volte 40 ducati per un'ora; che parimenti 60 ducati, per 5 ore, e 150 ducati per 7 ore, debbono riportare di perdita quanto 5 volte 60 ducati, e 7 volte 150 ducati per un'ora; facendo le indicate moltiplicazioni, avremo i tre prodotti che seguono:

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 40    | 60    | 150   |
| 3     | 5     | 7     |
| <hr/> | <hr/> | <hr/> |
| 120   | 300   | 1050  |

La regola essendosi ridotta a quella di società semplice, operiamo della seguente maniera:

$$\begin{array}{ll}
 1470: 120:: 84: x & 7: 4:: 12: x, \text{ cioè } 6\frac{2}{7} \\
 1470: 300:: 84: y \text{ ovvero } 7: 10:: 12: y, & 17\frac{1}{7} \\
 1470: 1050:: 84: z & 7: 35:: 12: z, \quad 60.
 \end{array}$$

Da ciò che si è detto si rileva, che quando i tempi sono differenti, bisogna moltiplicare il capitale di ciascuno pel tempo rispettivo, indi fare la somma di questi prodotti; il lucro o la perdita di ciascuno sarà il quarto termine di una proporzione, in cui il primo termine è la somma di que' prodotti, il secondo è il prodotto del capitale pel tempo corrispondente, ed il terzo termine è il guadagno o la perdita totale.

183. Se si proponesse di dividere un numero per esempio, 100, in 2 parti, le quali sieno tra loro nella ragione di 5: 7; questo problema appartiene ancora alla regola di società. In effetti, si considerino 5 e 7 come due capitali, e 100 come ciò che han prodotto, istituiremo per la soluzione del problema le due seguenti proporzioni:

$$\begin{array}{l} 12 : 5 : 100 : x \\ 12 : 7 : 100 : y \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{l} 3 : 5 :: 25 : x \text{ ossia } 41 \frac{1}{2} \\ 5 : 7 :: 25 : y \text{ ossia } 58 \frac{1}{2} \end{array}$$

Non altrimenti si dovrebbe operare, se il numero proposto si volesse dividere in 3 parti, 4 parti, ec. le quali sieno tra loro in data ragione.

189. Sia dunque proposta la seguente questione: un uomo morendo lascia 12000 ducati a distribuirsi fra tre suoi figli, in modo che il secondo abbia  $\frac{1}{2}$  del primo, ed il terzo  $\frac{1}{2}$  del secondo. Egli è manifesto che se il primo abbia 1, il secondo avrà  $\frac{1}{2}$ , ed il terzo  $\frac{1}{4}$  di  $\frac{1}{2}$  ossia  $\frac{1}{8}$  ossia  $\frac{1}{8}$ ; riduciamo i numeri 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{8}$  al medesimo denominatore, avremo  $\frac{8}{8}$ ,  $\frac{4}{8}$ ,  $\frac{1}{8}$ :

adunque l' eredità dee dividersi in 3 parti che sieno tra loro come l' espressioni  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{5}$ , ovvero come 10, 6, 5 i cui rapporti sono uguali ai primi. Quindi si troverà la porzione di ciascuno degli eredi, istituendo queste tre porzioni,

$$\begin{array}{ll} 21 : 10 :: 12000 : x & 7 : 10 :: 4000 : x \\ 21 : 6 :: 12000 : y \text{ ovvero } 7 : 6 :: 4000 : y & \\ 21 : 5 :: 12000 : z & 7 : 5 :: 4000 : z \end{array}$$

Trovando questi quarti proporzionali, scorge-remo la porzione del primo essere  $5714 \frac{2}{7}$  ducati; quella del secondo,  $3428 \frac{4}{7}$ ; e quella del terzo,  $2857 \frac{1}{7}$ .

190. Accenneremo un altro problema curioso, lasciandone la soluzione all' esercizio de' giovani.

Un uomo morendo lascia la moglie incinta, ed ordina per testamento, che se ella faccia maschio, abbiassi  $\frac{2}{3}$  del suo bene, ed il bambino  $\frac{1}{3}$ ; ma se faccia femmina, ella abbiassi  $\frac{1}{2}$ , e la bambina  $\frac{1}{2}$ ; questa donna partorisce insieme un maschio ed una femmina: si dimanda, quale dee essere la parte de' tre eredi?

Egli è chiaro dall' enunciato del testamento, che era intenzione del moribondo che il figlio avesse il doppio della madre, e che questa avesse il triplo della figlia: se dunque si suppone 1 la parte della figlia, la madre debbe averne 3, ed il figlio 6. Laonde bisognerà dividere l' eredità in tre parti che sieno tra loro come i numeri 1, 3, 6. Che però la pre-

sente questione non differisce affatto da quella che precede: onde senza intrattenerci di vantaggio, passiamo alla regola di *falsa posizione*.

*Della regola di falsa posizione.*

191. Si dice regola di *falsa posizione* quella in cui si pone un numero *falso*, per mezzo del quale si ottiene un numero vero. Prima di passar oltre, bisogna avvertire che questi problemi sogliono rientrare gli uni negli altri, intendiamo dire, che quelli che si sciolgono con una regola, potrebbero essere risolti con un'altra: quindi non esporremo qui che que' problemi che possono avere un rapporto lontano alle regole già esibite.

Un galantuomo fa in carrozza  $\frac{1}{2}$  del suo viaggio; una ruota essendosi rotta, fa  $\frac{1}{3}$  del viaggio a cavallo; il cavallo essendo divenuto zoppo, è costretto di farsi  $\frac{1}{4}$  del viaggio a piedi, e per giungere al luogo desiderato gli resta a fare ancor 6 miglia: si dimanda la lunghezza dell'intero viaggio.

Supponiamo la lunghezza dell'intero viaggio essere 12 miglia; la metà sarà 6, la quarta parte 3, e la sesta parte 2, in tutto, 11 miglia: quindi non gli resterebbe a fare che 1 miglio; ma egli ne dee far 6; dunque 1 deriva dalla falsa posizione 12, come 6 dal numero vero. Dunque facendo la proporzione  $1:6::12:x$ , si troverà che la lunghezza dell'intero viaggio è 72 miglia.

192. Vi ha tre getti d'acqua; il primo scorrendo solo, riempirebbe una vasca sottoposta in  $\frac{1}{3}$  di ora; il secondo, in  $\frac{1}{4}$  di ora; ed il terzo, in  $\frac{1}{5}$  di ora: si dimanda, scorrendo tutti tre insieme, in quanto tempo si riempirebbe la detta vasca?

Supponiamo il tempo cercato essere 1 ora: noi troveremo le quantità di acqua emanate da ciascun getto, in 1 ora, facendo le tre seguenti proporzioni, nelle quali la vasca si pone sempre uguale a 1:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} : 1 :: 1 : x \text{ ossia } \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} : 1 :: 1 : y \text{ ossia } \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} : 1 :: 1 : z \text{ ossia } \frac{1}{5} \end{array}$$

Adunque tutta l'acqua scorsa dai tre getti sarà  $\frac{1}{3}$  più  $\frac{1}{4}$  più  $\frac{1}{5}$ , in tutto,  $\frac{47}{60}$ ; ma tutta l'acqua è 1, cioè quanto si è posta la vasca: dunque  $\frac{47}{60}$  nasce dalla falsa posizione 1 ora, come la vasca 1 dal tempo vero: e perciò

$$\frac{47}{60} : 1 :: 1 : x.$$

Trovando questo quarto proporzionale, si avrà, pel tempo richiesto,  $\frac{60}{47}$  di ora, cioè 9 minuti primi.

193. Ciò potrebbe bastare per la regola di falsa posizione, dovendosi trattare di essa distesamente nell'Algebra; nondimeno per non lasciar niente a desiderare in questi Elementi, aggiungeremo un altro problema in cui non basta di supporre un numero falso, per ottenere il vero, ma bisogna supporne due; ciò che ha dato luogo alla regola di *doppia falsa posizione*.

Un galantuomo vuol fare la limosina a certi poveri; egli ha tal danaro in sacca, che se dà 3 grani per uno, gli avanzano 4 grani; ma se dà 4 grani per uno, gli mancano 8 grani; si domanda sapere il danaro, ed il numero de' poveri.

Supponiamo i poveri esser 5; il galantuomo dando 3 grani per ciascuno, avrà 15 grani, e ne avrà 19 co' 4 che gli superano; e dando a ciascuno 4 grani, ne avrà 20, e ne avrà 12 per gli 8 che gli mancano. Or non potendo egli avcre simultaneamente 19 grani e 12 grani, questi numeri sono certamente erronei: notiamo la differenza loro, la quale è 7. Supponiamo inoltre che i poveri sieno 6, quel galantuomo avrebbe 18 grani, e ne avrebbe 22 co' 4 che gli superano; ma dando 4 grani a ciascun povero, avrebbe 24 grani, e ne avrebbe 16 per gli 8 che gli mancano: dunque in questo secondo caso egli avrebbe nel medesimo tempo 22 grani e 16 grani, lo che non può essere: dunque i numeri 22 e 16 sono eziandio erronei, e la loro differenza è 6. Per non perdere di mira gli errori e le false posizioni, eccoli qui sotto in un punto di veduta.

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. <sup>a</sup> posizione.... 5 | 2. <sup>a</sup> posizione.... 6 |
| 1. <sup>o</sup> errore..... 7   | 2. <sup>o</sup> errore..... 6   |

Facciamo come la differenza degli errori alla differenza delle posizioni, così uno degli errori, per esempio, il primo, al quarto proportionale; vale a dire, nel caso nostro,  $1 : 1 :: 7 : x$  os-

sia 7. Se questo numero aggiungasi alla prima posizione 5, avremo 12 pel numero richiesto de' poveri. Se avessimo voluto servirci del secondo errore, in vece del primo, dicendo

$$1 : 1 :: 6 : x \text{ ; ossia } 6 ,$$

avremmo dovuto aggiungere questo numero alla seconda posizione 6; ed avremmo ottenuto 12, come qui innanzi, pel numero cercato de' poveri. Riflettendo che il galantuomo dando loro 3 grani per ciascuno, gli superavano 4 grani, si vede bene che egli avea in sacca 40 grani.

194. Abbiamo detto il quarto termine, trovato in ordine alla differenza degli errori, alla differenza delle posizioni e ad uno degli errori, doversi aggiungere alla posizione da cui questo error dipende, perchè abbiamo supposto gli errori essere in eccesso; ma se lo fossero in difetto, allora converrebbe sottrarre quel quarto termine della posizione.

Rimanendo l'enunciato del problema, supponiamo i poveri esser 15; avremo, per la prima condizione, il danaro del galantuomo essere 49, e per la seconda, 52; onde vi sarà 3 di differenza, ma in difetto. Supponiamo in secondo luogo i poveri essere 18, avremo, per la prima condizione, il danaro del galantuomo essere 58, e per la seconda, 64; onde vi sarà 6 di differenza, anche in difetto. Scriviamo gli errori e le posizioni, per non obbligarli, come abbiamo fatto qui innanzi.

|                               |    |                               |      |
|-------------------------------|----|-------------------------------|------|
| 1. <sup>a</sup> posizione.... | 15 | 2. <sup>a</sup> posizione.... | 18 . |
| 1. <sup>o</sup> errore.....   | 3  | 2. <sup>o</sup> errore.....   | 6.   |

Essendo 3 la differenza degli errori 3 e 6, e 3 ancora la differenza delle posizioni 15 e 18, il quarto termine addimandato essere dee 3, cioè uguale all' error 3, che sarebbe il terzo termine della proporzione da noi sopra indicata. Questo quarto termine 3 sottratto dalla posizione 15, ci darà il resto 12, pel numero cercato de' poveri.

### *Delle progressioni aritmetiche.*

195. Una serie di più numeri così disposti, che ciascuno differisce dal suo vicino per una medesima quantità, si chiama *progressione aritmetica*, oppure *serie per equidifferenze*.

Così i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec. costituiscono una progressione aritmetica, perchè ciascuno differisce dal suo vicino per l'unità.

Parimenti la serie de' numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ec. è una progressione aritmetica, perchè ciascuno differisce dal suo vicino per 2.

196. La progressione aritmetica può essere o *crescente* o *decrescente*. La prima denominazione le conviene quando i termini vanno aumentando, cioè a dire, quando il secondo sorpassa il primo, ed il terzo sorpassa d'altrettanto il secondo, ec. come 3, 7, 11, 15, 19, ec. La progressione aritmetica decrescente è quella in cui i termini vanno sempre diminuendo della medesima quantità, tali sono i numeri 47, 44, 41, 38, 35, ec.

197. La quantità costante di cui i numeri vanno

crescendo o diminuendo, si chiama la *differenza* della progressione aritmetica.

198. Noi ci ristogliamo a due indagini, dovendosi delle progressioni trattare distesamente nell'Algebra. La prima di queste indagini è di trovare un termine qualunque della progressione aritmetica, il primo termine e la differenza essendo dati. La seconda è di rinvenire la somma di quanti primi termini si vogliano della progressione.

199. Sia dunque data la progressione aritmetica crescente 3, 7, 11, 15, 19, ec. in cui 3 è il primo termine, e 4 la differenza. Riflettiamo che il secondo termine 7 è uguale al primo termine 3 più la differenza 4; che il terzo termine 11 è uguale al secondo termine 7 più la differenza 4, ovvero è uguale al primo termine 3 più 2 volte la differenza 4. Troveremo col medesimo discorso che il quarto termine 15 è uguale al primo termine 3 più 3 volte la differenza 4, ec. Dunque un termine qualunque della progressione aritmetica crescente è uguale al primo termine accresciuto tante volte della differenza quanto è il posto del termine meno uno: vale a dire il settimo termine sarebbe uguale al primo più 6 volte la differenza; l'ottavo sarebbe uguale al primo più 7 volte la differenza, ec.

Vogliasi, per esempio, trovare il quindicesimo termine della progressione aritmetica crescente in cui il primo termine è 5, e la differenza 3: un tal quindicesimo termine è 5 più 14 volte 3, cioè 47. La progressione di cui 47 è il quin-

dicesimo termine, sarebbe 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ec.

200. Applicando il medesimo ragionamento alle progressioni aritmetiche decrescenti, si conchiuderà, che un termine qualunque di essa è uguale al primo termine, diminuito tante volte della differenza quanto è il posto del termine che si cerca meno uno. Vale a dire, il decimo termine è uguale al primo diminuito 9 volte della differenza; l'undecimo è uguale al primo diminuito 10 volte della differenza, ec.

Sia da trovarsi il ventesimo termine della progressione decrescente in cui 100 è il primo termine, e 2 la differenza: un tal ventesimo termine è 100 meno 19 volte 2, cioè 62. La progressione di cui 62 è il ventesimo termine sarebbe 100, 98, 96, 94, ec.

201. Vediamo ora come ci dobbiamo condurre per la somma di più termini di una progressione aritmetica. Consideriamo la progressione aritmetica 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, ec.

Noi osserviamo in questa progressione la somma del primo e dell'ultimo termine essere 39; la somma del secondo e del penultimo essere ancor 39; la somma del terzo e dell'antipenultimo essere pure 39, e così di seguito: conchiuderemo che la somma di due termini qualunque ugualmente lontani dai due estremi, cioè egualmente lontani uno dal primo e l'altro dall'ultimo termine, è sempre uguale alla somma del primo e dell'ultimo termine.

202. Per pervenire dunque a determinare la

somma della progressione proposta scriviamo al di sotto, termine per termine, la medesima progressione presa a rovescio, e facciamo l'addizione de' termini corrispondenti, come qui segue:

$$\begin{array}{r}
 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37 \\
 37, 32, 27, 22, 17, 12, 7, 2 \\
 \hline
 39, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 39.
 \end{array}$$

Questa serie di termini uguali è chiaramente il doppio della proposta progressione: ora il numero di questi termini uguali è 8, come nella progressione, e la lor somma per conseguenza è uguale a 39 moltiplicato per 8, cioè a 312. Ma poichè questa somma è doppia della somma della progressione, sarà la somma cercata la metà di 312, ossia 156.

203. Il medesimo procedimento potendosi applicare ad altre qualunque progressioni aritmetiche, ne segue un metodo facilissimo per la somma di più termini di esse. Eccolo.

Si moltiplichino la somma del primo e dell'ultimo termine pel numero de' termini che si vogliono sommare, la metà di questo prodotto sarà la somma richiesta. O ciò che è lo stesso, si moltiplichino la somma del primo e dell'ultimo termine per la metà del numero de' termini che si vogliono sommare.

Si voglia, per esempio, la somma de' primi 13 termini della progressione 2, 5, 8, 11, 14, 17 &c. nella quale il primo termine è 2, e la dif-

ferenza 3. Il tredicesimo termine, trovato secondo l'art. 199, è 58; onde la somma del primo e del tredicesimo termine della progressione sarà 40. Or il prodotto di 40 per 15 essendo 520, sarà 260 la somma che da noi si cerca.

Similmente sia da trovarsi la somma de' primi 12 termini della progressione 58, 55, 48, 43, 38 ec. in cui il primo termine è 58, e la differenza 5. Il dodicesimo termine, trovato secondo l'art. 200, è 3; onde la somma del primo e del dodicesimo termine è 61. Si moltiplichino 61 per 6, che è la metà del numero de' termini che si vogliono sommare, si avrà 366, per la somma cercata.

204. Applichiamo queste dottrine ad alcune questioni: un padre per eccitare suo figlio allo studio, gli promette 3 carlini per la prima proposizione di geometria che questi apprende, 7 per la seconda, 11 per la terza, e così aumentando per ogni proposizione il premio di 4 carlini: si dimanda, quanto il padre dee dare al figlio, avendo questi appreso 47 proposizioni?

Si vede chiaramente che la nostra questione si riduce a trovare la somma di 47 termini della progressione aritmetica in cui 3 è il primo termine, e 4 la differenza. Bisogna dunque prima determinare l'ultimo termine; si trova questo, secondo la regola dell'articolo 199, uguale a 3 più 46 volte 4, uguale a 187. Or la somma richiesta si trova senza difficoltà uguale a 190 moltiplicato per  $\frac{47}{2}$ , uguale a 4465: onde si conchiude che il padre dee dare al figlio 4465 carlini, ossia  $446 \frac{1}{2}$  ducati.

205. Una palla di cannone spinta verticalmente all'insù, percorre in un secondo 195 piedi parigini; nell'altro secondo ne percorre 165; nel terzo secondo 135, e così sempre 30 di meno: si dimanda, quanti piedi ha percorso la palla dopo 7 secondi?

Egli è evidente che la questione si riduce a rinvenire la somma dei primi 7 termini della progressione aritmetica decrescente, nella quale il primo termine è 195, e la differenza 30. L'ultimo termine, cioè il settimo, determinato secondo la regola dell'articolo 200, è 15; che però la somma del primo e del settimo termine è 210. Ora si moltiplichino 210 per  $\frac{7}{2}$ , il prodotto è 735. Sicchè la palla di cannone, dopo 7 secondi, è ascesa all'altezza di 735 piedi parigini.

### *Delle progressioni geometriche.*

205. Una serie di più numeri talmente disposti, che ciascuno diviso per quello che lo precede dia il medesimo quoto, dicesi *progressione geometrica* ovvero *serie per equiquozienti*.

Così i numeri 1, 2, 4, 8, 16, 32 ec. costituiscono una progressione geometrica; perciocchè il quoto di 2 per 1, di 4 per 2, di 8 per 4, ec. è sempre 2.

206. Parimente la progressione geometrica può essere *crescente* o *decrescente*, secondo che i termini vanno aumentando o diminuendo. La progressione arrecata qui sopra è crescente. La progressione 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ , ec. sarebbe decrescente.

207. Anche nelle progressioni geometriche ci ristigneremo a due indagini; a rinvenire un termine qualsivoglia, il primo termine ed il quoto essendo dati. Questo quoto suol dirsi *esponente* della progressione. L'altra indagine sarà quella di trovare la somma di quanti primi termini si vogliano della progressione.

208. Sia dunque proposta la progressione geometrica 2, 6, 18, 54, 162, ec. in cui 2 è il primo termine, e 3 l'esponente; e si voglia rinvenire un termine qualunque. Si vede chiaramente che il secondo termine 6 è uguale al primo termine 2 moltiplicato per l'esponente 3; che il terzo termine 18 è uguale al primo termine 2 moltiplicato 2 volte di seguito per l'esponente 3; che il quarto termine 54 è uguale al primo termine 2 moltiplicato 3 volte di seguito per l'esponente 3, ec. Dunque, in generale, un termine qualunque della progressione geometrica si rinviene, moltiplicando il primo termine tante volte di seguito per l'esponente, quanti sono i termini che precedono quello che si richiede.

Quindi se nella proposta progressione 2, 6, 18, 54, 162, ec. si cerca il decimo termine, questo si troverà moltiplicando 2 nove volte di seguito per 3: un tal decimo termine sarà 59049.

Similmente, se nella progressione 3, 1,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$ , ec. in cui il primo termine è 3, e l'esponente  $\frac{1}{3}$ , si dimanda il settimo termine, questo sarà uguale a 3 moltiplicato 6 volte di seguito per  $\frac{1}{3}$ ; onde sarà uguale a  $\frac{1}{27}$ .

209. Passiamo alla somma della progressione geometrica. Sia proposta la progressione

1, 2, 4, 8, 32, 64, 128, 256, 512, ec.

si moltiplichì ciascun termine per l' esponente 2, avremo un'altra progressione doppia della proposta,

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ec.

Sottraendo da questa seconda serie la prima, la differenza sarà 1024 meno 1, cioè 1023, poichè tutti gli altri termini come uguali si distruggono. Si rifletta che 1024 è precisamente il termine che seguirebbe l' ultimo di quelli che si sono enunciati nella prima progressione, e che 1 è il primo termine di questa.

Sia inoltre 3, 9, 27, 81, 243, 729, ec. un'altra progressione geometrica in cui l' esponente è 3. Moltiplicando ciascun termine per 3, avremo

9, 27, 81, 243, 729, 2187, ec.

Questa seconda progressione essendo tripla della prima, la differenza loro sarà il doppio della prima progressione che si è proposta. Ora la differenza de' termini qui scritti è 2187 meno 3, cioè 2184; quindi la somma della progressione 3, 9, 27, ec. sarà  $\frac{2184}{2}$ , cioè 1092. Si rifletta che 2187 è precisamente il termine che seguirebbe l' ultimo di quelli enunciati nella prima progressione; che 3 ne è il primo termine, e che 2 è la differenza dell' esponente 3 dall' unità.

Il medesimo discorso potendosi applicare ad altre progressioni geometriche, ne segue una re-

gola facilissima per trovare la somma di quanti termini si vogliano. Eccola: si cerchi il termine che segue l'ultimo di quelli che si vogliano sommare, e la differenza di questo e del primo termine della progressione si divida per la differenza dell'esponente sull'unità; ciò che si ottiene è la somma cercata.

210. È detto nella storia che un Bramino, inventore del giuoco degli scacchi, avesse dimandato in premio ad un giovane Re dell'India una misura di frumento, raddoppiata tante volte quante sono le caselle dello scacchiere, che poniamo essere 52: quante misure di frumento avrebbe dovuto dare il Re per soddisfare questa dimanda?

Si troverà il numero delle misure facendo la somma di 52 termini della progressione geometrica in cui il primo termine è 1, e l'esponente 2. Che perciò si determini, secondo la regola dell'art. 208, il termine 53 della progressione, il quale è 4294967296; da questo numero si sottragga il primo termine 1, avremo, per la somma cercata, 4294967295 misure. Se quest'ultimo numero si divida per 24, si conoscerà di quanti tomoli di frumento fu la dimanda; che si troverà 178956970 tomoli e  $\frac{5}{6}$ .

211. Parte da Napoli un corriere verso Pietroburgo, e nella prima ora fa 9 miglia, nella seconda 5, nella terza 1, nella quarta  $\frac{1}{2}$  di miglio, e così in ogni ora  $\frac{1}{2}$  del cammino fatto nell'ora precedente: si dimanda, dopo 12 ore, quante miglia ha fatto questo corriere?

La questione si riduce evidentemente a rinvenire la somma de' 12 primi termini della progressione geometrica in cui il primo termine è 9, e l'esponente  $\frac{1}{2}$ . Ora il tredicesimo termine di siffatta progressione, determinato secondo l'art. 208, è  $\frac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{49}}$ ; si sottragga questo numero dal primo termine 9, si avrà  $\frac{8 \frac{1}{2} + \frac{1}{49}}$ ; si divida questa differenza per  $\frac{1}{2}$ ; che è la differenza tra l'unità e l'esponente  $\frac{1}{2}$ , si avrà  $\frac{17 \frac{1}{2} + \frac{1}{49}}$ , ossia 13  $\frac{9 \frac{1}{2} + \frac{1}{49}}$  miglia, per lo spazio che il corriere ha corso dopo 12 ore.

Queste cose son troppo facili per non intrattenerci più lungamente; passiamo perciò ad altre questioni.

212. Un capitale di 1000 ducati, impiegato al 5 p. %, cui si aggiugne ogni anno l'interesse, dopo 5 anni, quanto diventerà?

Siccome questo calcolo conduce ben presto alle frazioni, ci serviremo delle decimali, ma senza spingerle più lungi delle parti millesime; poichè delle parti più piccole non debbono qui entrare in considerazione.

Riflettendo che 5 è la ventesima parte di 100, è chiaro, che se al capitale dato aggiungiamo la sua ventesima parte, si otterrà il valore del capitale per l'anno prossimo; e se a ciò che il capitale è divenuto aggiungiamo ancora la sua ventesima parte, si saprà ciò che vale il capitale dopo 2 anni; e così di seguito. Ed in tal modo conosceremo eziandio gli accrescimenti successivi ed annui del capitale.

Il capitale adunque di 1000 ducati varrà

|                  |           |
|------------------|-----------|
| dopo 1 anno..... | 1050      |
|                  | 52, 5     |
| dopo 2 anni..... | 1102, 5   |
|                  | 55, 125   |
| dopo 3 anni..... | 1157, 625 |
|                  | 57, 831   |
| dopo 4 anni..... | 1215, 506 |
|                  | 60, 775   |
| dopo 5 anni..... | 1276, 281 |

213. Se il numero degli anni fosse più grande, si continuerà nella medesima maniera. Ma ognun vede che quando il numero degli anni è molto grande, il calcolo riesce lungo e penoso: che però cerchiamo il mezzo di abbreviare questa regola, la quale suole chiamarsi *regola d'interesse sopra interesse*.

Il capitale di 100 ducati cangiandosi, a capo di un anno, in un capitale di 105 ducati, è chiaro, che il capitale di 1000 ducati varrà dopo un anno il quarto termine della proporzione  $100 : 105 :: 1000 : x$ , cioè  $\frac{1000}{105}$  di 1000, ossia  $\frac{200}{21}$  di 1000. Similmente il capitale di 1000 ducati varrà, dopo 2 anni, il quarto termine della proporzione  $100 : 105 :: \frac{200}{21} \text{ di } 1000 : x$ , che è  $\frac{1000}{105}$  di  $\frac{200}{21}$  di 1000, ossia  $\frac{200}{21}$  di  $\frac{200}{21}$  di 1000; e così dopo 3 anni si troverà il capitale di 1000 ducati essere  $\frac{200}{21}$  di  $\frac{200}{21}$  di  $\frac{200}{21}$  di 1000, ec. Quindi

il capitale di 1000 ducati, impiegato al 5 p.  $\frac{2}{3}$ , cui si aggiugne ogni anno l'interesse, varrà, dopo 5 anni, il prodotto di 1000 moltiplicato 5 volte di seguito per  $\frac{11}{10}$ : esso varrà  $\frac{1000 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11}{10^5}$ , ossia  $\frac{161051}{1000}$ . Eseguyendo la divisione, e riducendo il resto in frazioni decimali sino alle parti millesime, troveremo, pel cercato capitale, 1276, 281, come qui innanzi,

214. Se il capitale di 1000 ducati fosse impiegato al 10 p.  $\frac{2}{3}$ , e si volesse sapere ciò che esso addiviene, dopo 7 anni, coll'aggiunta de' gl'interessi ogni anno; si troverà valere, dopo un anno, il quarto termine della proporzione  $100:110::1000:x$ , cioè  $\frac{11}{10}$  di 1000, ossia  $\frac{11}{10}$  di 1000; dopo 2 anni, il quarto termine della proporzione  $100:110::\frac{11}{10}$  di 1000:  $x$ , cioè  $\frac{11}{10}$  di  $\frac{11}{10}$  di 1000 ossia  $\frac{11}{10}$  di  $\frac{11}{10}$  di 1000; dopo 3 anni, varrà il quarto termine della proporzione  $100:110::\frac{11}{10}$  di  $\frac{11}{10}$  di 1000:  $x$ , cioè  $\frac{11}{10}$  di  $\frac{11}{10}$  di  $\frac{11}{10}$  di 1000, ec. Sicchè il capitale di 1000 ducati, impiegato al 10 p.  $\frac{2}{3}$ , cui si aggiugne ogni anno l'interesse, varrà, dopo 7 anni, il prodotto di 1000 moltiplicato 7 volte di seguito per  $\frac{11}{10}$ . Fatto il calcolo, si troverà 1948, 7171 ducati.

215. Il medesimo ragionamento si può applicare ad ogni altro capitale, impiegato a qualunque altro interesse, per un numero qualunque di anni. Quindi si può stabilire qual regola generale, che per sapere quel che addiviene, dopo un certo numero di anni, un capitale cui ogni anno si aggiugne l'interesse, bisognerà moltiplicare

il dato capitale tante volte di seguito quanti sono gli anni che il capitale è stato impiegato, per la frazione in cui il numeratore è 100 più l'interesse di 100, e'l denominator 100: o ciò che è lo stesso, bisognerà moltiplicare il dato capitale per quel termine della progressione geometrica che vien disegnato dal numero degli anni che il capitale è stato impiegato, nella quale progressione il primo termine e l'esponente sono la frazione che ha per numeratore 100 più l'interesse annuo di 100, e per denominatore 100.

216. Supponiamo che un uomo abbia una rendita annua di 200 ducati, e che egli voglia cederla per 5 anni consecutivi pel danaro costante, calcolando gl'interessi al 6 p.  $\frac{2}{3}$ : si domanda, quanto costui dee ricevere? Qui al contrario della precedente questione 106 ducati si cangiano, a capo di un anno, in 100 ducati. Che perciò facendo la proporzione  $106 : 100 :: 200 : x$ , ovvero  $53 : 50 :: 200 : x$ , si troverà quel che si dee ricevere per la rendita del primo anno. Similmente dicendo,  $53 : 50 ::$  ciò che son divenuti 200 ducati dopo un anno:  $x$ , si troverà quanto si dee ricevere per la rendita del 2.<sup>o</sup> anno, e così di seguito. Eccone il calcolo.

Per 200 ducati che spettavano,

|                              |      |     |
|------------------------------|------|-----|
| dopo 1 anno egli riceve .... | 188, | 679 |
| dopo 2 anni .....            | 177, | 999 |
| dopo 3 anni .....            | 167, | 923 |
| dopo 4 anni .....            | 158, | 417 |
| dopo 5 anni .....            | 149, | 450 |
| Somma                        | 842, | 468 |

Sicchè il possessore della rendita non può pretendere in danaro contante che 842, 468 ducati.

217. Ma ben si vede che se il numero degli anni fosse molto grande, il calcolo sarebbe penosissimo: cerchiamo di abbreviarlo.

Perciocchè per la rendita del primo anno si dee ricevere  $\frac{60}{11}$  di 200; che per quella del secondo anno si dee ricevere  $\frac{60}{11}$  di  $\frac{60}{11}$  di 200; ossia il prodotto di 200 moltiplicato 2 volte di seguito per  $\frac{60}{11}$ ; che per la rendita del terzo anno conviene avere  $\frac{60}{11}$  di  $\frac{60}{11}$  di  $\frac{60}{11}$  di 200, ossia il prodotto di 200 tre volte di seguito per  $\frac{60}{11}$ , ec. chiara cosa è, che si saprà quanto si dee avere in danaro contante, per l'annua rendita di ducati 200, per 5 anni consecutivi, calcolando gl'interessi al 6 p.  $\frac{6}{100}$ , se sommiamo i 5 primi termini della progressione geometrica in cui il primo termine è 200 moltiplicato per  $\frac{60}{11}$ , e l'esponente  $\frac{60}{11}$ . Ed in vero, il sesto termine di siffatta progressione è  $\frac{200 \cdot 6^5}{11^5}$ , che sottratto dal primo termine 200 moltiplicato per  $\frac{60}{11}$ , ossia da  $\frac{100000}{11}$ , si avrà per resto  $\frac{100000 - 200 \cdot 6^5}{11}$ . Ora conviene dividere questa frazione ( v. art. 209 ) per  $\frac{1}{11}$ , che è la differenza tra l'esponente e l'unità: o ciò che è lo stesso, conviene moltiplicare l'indicata frazione per  $\frac{60}{11}$  ( v. art. 78. ) Ma il denominatore 22164361129 è il prodotto di 418195495 per 53; dunque distruggendosi 53 nel numeratore e nel denominatore, il prodotto sarà  $\frac{100000 - 200 \cdot 6^5}{418195495}$ . Ricavandone gl'interi, e riducendo il resto in decimali sino alle parti millesime, si otterrà 842, 472 ducati pel da-

naro contante che dee ricevere colui il quale cede l'annua rendita di 200 ducati , per 5 anni consecutivi , calcolando gl' interessi al 6 per  $\frac{1}{100}$  ,

Non dee recare meraviglia che tra questo calcolo e 'l precedente vi sia la differenza di 4 millesimi , poichè ciò dipende dall' avere trascurato qualche parte decimale che ha influito sulle successive operazioni fatte nel calcolo precedente. In effetti , se alla seconda operazione avessimo scritto 178 , in vece di 177 , 999 , e avessimo proseguito il calcolo su questo piede , avremmo trovato :

|       |   |      |       |       |      |
|-------|---|------|-------|-------|------|
| dopo  | 1 | anno | ..... | 188 , | 679  |
| dopo  | 2 | anni | ..... | 178 , | 000  |
| dopo  | 3 | anni | ..... | 167 , | 924  |
| dopo  | 4 | anni | ..... | 158 , | 418  |
| dopo  | 5 | anni | ..... | 149 , | 450  |
| Somma |   |      |       | 842 , | 471. |

Nel qual caso la differenza tra le due maniere di calcolare sarebbe stata appena di 1 millesimo.

218. Qualcheduno prende ad imprestito 1000 ducati all'annuo interesse del 5 per  $\frac{1}{100}$  , e paga ogni anno 80 ducati ; ciò fa più che l'interesse , quindi il capitale va sempre diminuendo : si vuol sapere , quanto resta a dare dopo 7 anni ?

Dicendo  $100 : 105 :: 1000 : x$  , si troverà che il capitale 1000 ducati varrà dopo 1 anno 1050 ducati ; da cui detratti 80 ducati , resterà il debito 970 ducati. Similmente dicendo pel secondo

anno 100: 105:: 970 : x, si troverà 1018, 5 ciò che addivene il capitale unitamente agl' interessi; e dettrattine 80 ducati, il debito sarà dopo 2 anni 938, 5. Si opererà della medesima maniera per gli altri anni successivi, come dal seguente calcolo si può rilevare.

|             |       |          |
|-------------|-------|----------|
| dopo 1 anno | ..... | 970      |
| dopo 2 anni | ..... | 938, 5   |
| dopo 3 anni | ..... | 905, 425 |
| dopo 4 anni | ..... | 870, 696 |
| dopo 5 anni | ..... | 834, 250 |
| dopo 6 anni | ..... | 795, 941 |
| dopo 7 anni | ..... | 755, 738 |

Sicchè quegli che ha preso ad imprestito ducati 1000 all'annuo interesse del 5 per  $\frac{5}{100}$ , pagando ogni anno 80 ducati, dovrà ancor dare dopo 7 anni 755, 738 ducati.

Ma il calcolo si potrà rendere più breve riflettendo che 1000 ducati coll' annuo interesse del 5 per  $\frac{5}{100}$ , dopo 1 anno, valgono  $\frac{105}{100}$  di 1000, e che valgono  $\frac{105}{100}$  di 1000 meno 80, per gli 80 ducati che paga il debitore. Ond'è che dopo 2 anni, pagando 80 ducati, egli dovrà dare  $\frac{105}{100}$  di  $\frac{105}{100}$  di 1000, meno  $\frac{105}{100}$  di 80, meno 80. Si dimostrerà similmente che dopo 3 anni, essendosi pagati 80 ducati, il debito sarà  $\frac{105}{100}$  di  $\frac{105}{100}$  di  $\frac{105}{100}$  di 1000, meno  $\frac{105}{100}$  di  $\frac{105}{100}$  di 80, meno  $\frac{105}{100}$  di 80, meno 80: e così si ragionerà per gli altri anni successivi. Dal che si vede che la questione ha due parti, la prima delle quali è il prodotto

di 1000 sette volte di seguito per  $\frac{21}{2}$ , e l'altra presa a rovescio forma la progressione geometrica in cui il primo termine è 80, e l'esponente  $\frac{21}{2}$ .

Cercandone la somma de' 7 primi termini, giusta l' art. 209, si trova essere  $\frac{1+2+3+4+5+6+7}{1}$  ossia 651, 360. Il prodotto di 1000 moltiplicato 7 volte di seguito per  $\frac{22}{100}$ , è  $\frac{1000 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22}{100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100 \times 100}$  ossia 1407, 100. Quindi la differenza loro è 755, 740; il quale risultamento differisce per 2 millesimi da quello che per altre vie nel calcolo precedente si è ottenuto; e ciò dipende dalla negligenza di alcuni decimali che hanno influito su le successive operazioni.

219. Se si proponesse di sapere, dopo quanti anni si estinguerà un debito di 1000 ducati, convenuto l'interesse al 5 per  $\frac{1}{100}$ , e pagando ogni anno 120 ducati? questa questione non si può risolvere che coll'aiuto de' logaritmi (1).

(1) Se vi sieno due serie di rincontro, una aritmetica e l'altra geometrica, i termini della progressione aritmetica si diranno i *logaritmi* de' termini corrispondenti della progressione geometrica. Così i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ec. saranno i rispettivi *logaritmi* de' numeri 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1358 ec.

I logaritmi hanno moltissime proprietà, e renderebbero molto più brevi i calcoli precedenti; ma non è qui il luogo di parlarne.

## APPENDICE

*De' numeri complessi.*

1. Per la somma e sottrazione de' numeri complessi ci riportiamo a ciò che si è detto pag. 91 e 92, qui intendiamo parlare solamente della moltiplicazione e divisione di essi.

Or sebbene nella pag. 93 abbiamo insegnato il modo di moltiplicare un numero complesso per un altro incompleso, nondimeno faremo qui vedere che si può pervenire al medesimo risultato per una via più breve.

2. Vogliasi moltiplicare 36 lire e 12 soldi per 18.

|                    |       |      |     |       |
|--------------------|-------|------|-----|-------|
| Moltiplicando      | 36    | lire | 12  | soldi |
| Moltiplicatore     | 18    |      |     |       |
|                    | <hr/> |      |     |       |
|                    | 288   |      |     |       |
|                    | 36    |      |     |       |
| per 10 soldi ..... | 9     |      |     |       |
| per 2 soldi ...    | 1     |      | 16. |       |
|                    | <hr/> |      |     |       |
| Prodotto           | 658   |      | 16. |       |

Ragioneremo nel seguente modo: egli è chiaro che in questa operazione si vuol ripetere 18 volte 36 lire, e 18 volte 12 soldi. Il primo di questi parziali prodotti si ottiene con le regole ordinarie della moltiplicazione; ed il secondo si potrebbe avere col medesimo mezzo. Ma per evitare la riduzione de' soldi in lire, lo che si

dovrebbe fare per mezzo della divisione, consideriamo 12 soldi del moltiplicando decomposti in 10 soldi, più 2 soldi: ora egli è evidente che il prodotto di 1 lira per 18 sarebbe 18 lire; ma 10 soldi sono la metà di 1 lira; dunque il prodotto di 10 soldi per 18 sarà 9 lire, che noi aggiungeremo al primo risultamento. Ci resta a moltiplicare 2 soldi per 18. Siccome 2 soldi è  $\frac{1}{5}$  di 10 soldi, il prodotto di 2 soldi per 18 varrà  $\frac{1}{5}$  del prodotto di 10 soldi per 18, cioè varrà  $\frac{1}{5}$  di 9 lire, ossia 1 lira e  $\frac{4}{5}$ : ma 1 lira valendo 20 soldi,  $\frac{4}{5}$  di lira saranno 16 soldi. Scrivendo il prodotto parziale 1 lira e 16 soldi sotto i precedenti, e sommandoli insieme, avremo 658 lire e 16 soldi pel prodotto totale,

5. Sia ancora a moltiplicarsi 13 canne, 5 palmi, 9 once e 2 minuti per 12.

|                    |                 |                |                |                |
|--------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| Moltiplicando      | 13 <sup>c</sup> | 5 <sup>p</sup> | 9 <sup>o</sup> | 2 <sup>m</sup> |
| Moltiplicatore     | 12.             |                |                |                |
|                    | <hr/>           |                |                |                |
|                    | 26              |                |                |                |
|                    | 15              |                |                |                |
| per 4 palmi .....  | 6               |                |                |                |
| per 1 palmo ....   | 1               | 4              |                |                |
| per 6 once .....   |                 | 6              |                |                |
| per 3 once .....   |                 | 3              |                |                |
| per 2 minuti ..... |                 |                | 4              | 4              |
|                    | <hr/>           |                |                |                |
| Prodotto .....     | 164             | 5              | 4              | 4              |

Dovendosi in questo esempio ripetere 12 volte

13 canne, 12 volte 5 palmi, 12 volte 9 once e 12 volte 2 minuti, otterremo il primo de' parziali prodotti moltiplicando 13 per 12 secondo le regole ordinarie. Indi concepiamo 5 palmi del moltiplicando decomposti in 4 palmi, più 1 palmo; e poichè il prodotto di 1 canna per 12 è 12 canne, il prodotto di 4 palmi che fanno  $\frac{1}{3}$  di canna, per 12, sarà 6 canne; ed il prodotto di 1 palmo per 12 sarà  $\frac{1}{3}$  di 6 canne, cioè 1 canna e 4 palmi. Inoltre consideriamo 9 once sciolte in 6 once più 3 once; il prodotto di 12 per 6 once sarà la metà del prodotto di 1 palmo per 12, perciocchè 6 once valgono  $\frac{1}{3}$  di palmo: onde un tal prodotto sarà  $\frac{1}{3}$  di 1 canna e 2 palmi, cioè sarà 6 palmi. Quindi il prodotto di 12 per 3 once sarà 3 palmi. Finalmente essendo 2 minuti uguale a  $\frac{1}{3}$  di oncia, il prodotto di 2 minuti per 12 sarà  $\frac{2}{3}$  di oncia, ossia 4 once e 4 minuti. Scritti rispettivamente questi parziali prodotti gli uni sotto degli altri, e sommati insieme, avremo 16 $\frac{1}{2}$  canne, 5 palmi, 4 once e 5 minuti per prodotto totale.

4. Sebbene ne' due surriferiti esempi abbiamo operato una volta su numeri composti di lire e soldi, ed un'altra volta su numeri composti di canne, palmi, once e minuti; nientedimeno è facile di vedere che lo stesso metodo si può praticare, qualunque siano le unità componenti il moltiplicando. Imperciocchè lo spirito di questo metodo stà nel concepire il numero incompleto come un numero astratto, e decomporre le unità che accompagnano le unità principali del

moltiplicando, in modo che ogni parzial prodotto sia la metà, il terzo, il quarto, e generalmente una *parte aliquota* del prodotto che precede.

5. Passiamo a vedere come si moltiplichino un numero complesso per un altro ancor complesso, al che ci condurrà la seguente questione.

Un operaio ha fatto 5 tese, 3 piedi e 7 pollici di lavoro a 7 lire, e 15 soldi per ogni tesa: si dimanda, quanto bisogna dargli?

Se l'operaio avesse fatto solamente 5 tese, è chiaro, che dovrebbe avere 5 volte 7 lire e 15 soldi; ma siccome ha fatto ancor 3 piedi, che è la metà di 1 tesa, così deve avere ancora la metà di 7 lire e 15 soldi; e pe' 7 pollici di lavoro, che sono  $\frac{7}{12}$  di 1 piede oppure  $\frac{7}{12}$  di 1 tesa, gli spettano ancora  $\frac{7}{12}$  di 7 lire e 15 soldi. Da ciò si scorge che converrebbe moltiplicare 7 lire e 15 soldi pei numeri astratti 5 più  $\frac{3}{2}$  più  $\frac{7}{12}$ , poichè il moltiplicatore 5 dovendosi considerare come un numero astratto, tali sono ancora le frazioni che lo accompagnano; ma il prodotto sarà composto di unità della medesima specie che il moltiplicando. Ed è sempre in questo senso che s'intende fare la moltiplicazione di un numero complesso per un altro ancor complesso.

La qual cosa essendo ben intesa, proponiamoci di moltiplicare, l'un per l'altro, i due seguenti numeri complessi.

Moltiplicando...  $14^{\text{lr.}} 9^{\text{s.}} 5^{\text{den.}} \frac{3}{4}$   
 Moltiplicatore...  $12^{\text{te.}} 5^{\text{pi.}} 8^{\text{pol.}} 7^{\text{lin.}}$

---

|                                  |    |                        |
|----------------------------------|----|------------------------|
|                                  | 28 |                        |
|                                  | 14 |                        |
| per 5 soldi.....                 | 3  |                        |
| per 4 soldi.....                 | 2  | 8                      |
| ( per 1 soldo.....               | 0  | 12 )                   |
| per 4 denari.....                | 0  | 4                      |
| per 1 denaro.....                | 0  | 1                      |
| per $\frac{1}{4}$ di denaro..... | 0  | 0 9                    |
| per tre piedi.....               | 7  | 4 8 $\frac{3}{4}$      |
| ( per 1 piede.....               | 2  | 8 2 $\frac{33}{100}$ ) |
| per 2 piedi.....                 | 4  | 16 5 $\frac{33}{100}$  |
| per 6 pollici.....               | 1  | 4 1 $\frac{33}{100}$   |
| ( per 1 pollice.....             | 0  | 4 0 $\frac{33}{100}$ ) |
| per 2 pollici.....               | 0  | 8 0 $\frac{33}{100}$   |
| per 6 linee.....                 | 0  | 2 0 $\frac{33}{100}$   |
| per 1 linea.....                 | 0  | 0 4 $\frac{33}{100}$   |

---

187 9 5  $\frac{3337}{10000}$

È chiaro che si otterrà il prodotto facendo la moltiplicazione sopra tutto il moltiplicando per ciascuna delle parti del moltiplicatore, al che si perverrà nella seguente maniera.

Si moltiplichì prima il numero 14 lire pel numero astratto 12, come si usa nella moltiplicazione ordinaria, e si avrà un certo numero di lire. Di poi considerando 9 soldi decomposti in 5 soldi e 4 soldi, si faccia la moltiplicazione di

★

questi numeri per 12; e perchè 5 soldi è  $\frac{1}{4}$  di 1 lira, ed il prodotto di 1 lira per 12 sarebbe 12 lire, il prodotto adunque di 5 soldi per 12 sarà 3 lire. Per le medesime ragioni il prodotto di 4 soldi per 12 sarà  $\frac{1}{3}$  di 12 lire, ovvero 2 lire e 8 soldi. Ciò fatto, scomponiamo 5 denari in 4 denari e 1 denaro, ma prima di moltiplicare 4 denari per 12, cerchiamo il prodotto di 1 soldo per 12, che è 12 soldi. Questo prodotto che suole chiamarsi *ausiliario*, si racchiuda tra due linee per rammentarci che non dee esser compreso nella somma. Ora essendo 4 denari la terza parte di un soldo, il prodotto di 4 denari per 12 sarà 4 soldi; ed il prodotto di 1 denaro per 12 sarà 1 soldo, cioè la quarta parte del prodotto precedente; ed il prodotto di  $\frac{1}{4}$  di 1 denaro per 12 sarà  $\frac{3}{4}$  di 1 soldo, ossia 9 denari.

Sciogasi ancor 5 piedi in 3 piedi e 2 piedi. Siccome il prodotto di 14 lire, 9 soldi, 5 denari e  $\frac{1}{4}$  per 1 tesa sarebbe 14 lire, 9 soldi, 5 denari e  $\frac{1}{4}$ ; così il prodotto del detto moltiplicando per 3 piedi ne sarà la metà, conciossiachè 5 piedi sono  $\frac{1}{2}$  di una tesa: onde un tal prodotto sarà 7 lire, 4 soldi, 8 denari e  $\frac{1}{2}$ . Il prodotto del moltiplicando per 1 piede sarà la terza parte del prodotto precedente; esso sarà 2 lire, 8 soldi, 2 denari e  $\frac{1}{12}$ ; e conviene chiuderlo tra due linee, perchè è un prodotto ausiliario. Da ciò si rileva facilmente che il prodotto del moltiplicando per 2 piedi esser dee 4 lire, 16 soldi, 5 denari e  $\frac{1}{6}$  di denaro.

Il prodotto di tutto il moltiplicando per 8 pol-

lici si avrebbe prendendo  $\frac{2}{3}$  del prodotto per 1 piede, conciossiachè 8 pollici sono  $\frac{2}{3}$  di 1 piede; ma lo potremo più comodamente ottenere scomponendo 8 pollici in 6 pollici più 2 pollici. Allora il prodotto del moltiplicando per 6 pollici sarà la metà del prodotto per 1 piede: esso sarà 1 lira, 4 soldi, 1 denaro e  $\frac{2}{11}$ . Ed il prodotto per un pollice sarà la sesta parte di quest'ultimo, sarà cioè 4 soldi e  $\frac{7}{11}$  di denaro; onde il prodotto del moltiplicando per due pollici sarà 8 soldi e  $\frac{7}{11}$  di denaro.

Finalmente si divida 7 linee in 6 linee e 1 linea. Il prodotto del moltiplicando per 6 linee sarà la metà del prodotto ausiliario per 1 pollice; un tal prodotto sarà 2 soldi e  $\frac{7}{11}$  di denaro. Quindi il prodotto del moltiplicando per 1 linea sarà la sesta parte di quest'ultimo: esso prodotto sarà 4 denari e  $\frac{7}{11}$  di denaro.

Ci resta ormai a sommare tutti questi parziali prodotti, incominciando dalle frazioni.

Si vede primieramente che  $\frac{7}{11}$ ,  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{7}{11}$  fanno  $\frac{21}{11}$  ossia 2 interi e  $\frac{9}{11}$ . Unendo questa frazione a  $\frac{7}{11}$ ,  $\frac{7}{11}$  e  $\frac{7}{11}$ , risulterà  $\frac{36}{11}$ ; e questa frazione si scriverà solamente nel prodotto, e si riterranno i 2 denari per aggiungerli alla colonna de' denari. Indi continuando la somma nel modo ordinario, avremo per prodotto totale 187 lire, 9 soldi, 5 denari e  $\frac{36}{11}$ .

6. Si vede che l'andamento da noi seguito si applica parimente a tutti i casi ne' quali si propone di moltiplicare un numero complesso per un altro ancor complesso. In effetti, è facile di

vedere che il metodo consiste nel decomporre le unità sì del moltiplicando che del moltiplicatore in modo, che ogni prodotto parziale sia la metà, la terza parte, la quarta parte, ed in generale, una parte aliquota del prodotto che precede; lo che può farsi sempre, ma non in una maniera ugualmente comoda. Allorchè siffatta decomposizione non si presenta sotto una forma abbastanza semplice, si supplirà per mezzo dei prodotti ausiliarii, i quali si chiuderanno tra due linee affine di non comprenderli nella somma.

7. Comechè nella pag. 95 abbiamo insegnato la maniera di dividere un numero complesso per un altro incompleto, nondimeno aggiungeremo qui anche un esempio, sì perchè i giovani abbiano occasione di meglio esercitarsi, sì perchè le due operazioni, cioè la moltiplicazione e la divisione sieno uniformi in questo appendice.

---

( 215 )

Debbasi adunque dividere 53 anni , 3 mesi ,  
17 giorni , 15 ore e 56 minuti per 18.

Divid. 53<sup>re</sup> 5<sup>me</sup> 17<sup>gi</sup> 15<sup>or</sup> 56<sup>mi</sup> Divis... 18

$$\begin{array}{r}
 17 \\
 \underline{12} \\
 54 \\
 \underline{17} \\
 204 \\
 \underline{5} \\
 207 \\
 \underline{9} \\
 50 \\
 \underline{270} \\
 17 \\
 \underline{287} \\
 17 \\
 \underline{24} \\
 68 \\
 \underline{54} \\
 408 \\
 \underline{15} \\
 423 \\
 \underline{9} \\
 60 \\
 \underline{540} \\
 56 \\
 \underline{576} \\
 000
 \end{array}$$

Quoto. 2<sup>re</sup> 11<sup>me</sup> 15<sup>gi</sup> 25<sup>or</sup> 32<sup>mi</sup>

Dopo avere scritto il divisore alla destra del dividendo, si dica: 18 in 53 entra 2 volte, e si scriverà 2 per quoziente. Questo 2 che nell'atto della divisione si ha come un numero astratto, sarà 2 anni, cioè della medesima specie del dividendo. Lo stesso intendasi per le altre unità delle quali il dividendo si compone. Il prodotto di 2 per 18 essendo 36, il resto della nostra divisione sarà 17, cioè 17 anni. I quali ridotti a mesi saranno 204, e saranno 207 coi 3 mesi del dividendo. Il quoto di 207 per 18 è 11: si scriva questo numero nel quoziente dopo i 2 anni, e si avrà così il quoto de' mesi. Il prodotto di 11 per 18 essendo sottratto da 207, si avrà per resto 9. Si riducauo questi 9 mesi in giorni, ed ai 270 giorni che risultano si aggiungano ancora i 17 giorni del dividendo: otterremo 287 giorni. Il quoto di 287 per 18 essendo 15, si scriverà questo numero appresso il quoto 11, cioè appresso quello de' mesi, e si noterà il resto 17. Il prodotto di 17 per 24 ci farà conoscere che 17 giorni sono 408 ore, e saranno 425 coll'aggiunta delle 15 ore del dividendo. Il numero 425 essendo diviso per 18, ci dà 23 pel quoto delle ore, con 9 di resto. Dopo avere notato 23 appresso il quoto 15 de' giorni, scomporremo 9 ore in 540 minuti, e vi aggiungeremo 56 minuti del dividendo; tal che l'ultimo numero che resta a dividersi per 18 è 576. Il quoto di 576 per 18 è 32 senza resto; noi noteremo 32 che è il quoto de' minuti dopo quello delle ore. Sicchè il quoto della divisione propostaci è 2 anni, 11 mesi, 15 giorni, 23 ore, e 32 minuti.

8. Da questo solo esempio può ognun comprendere che la divisione di un numero complesso per un altro incompleto non ha alcuna difficoltà. Imperciocchè non si dee far altro che incominciare l'operazione dalle unità della massima specie e proseguire sino a quelle della minima, avendo la precauzione di risolvere i resti in unità delle specie inferiori, le quali aggiunte alle unità della medesima specie del dividendo formeranno i dividendi parziali. Ciascuno di questi essendo diviso pel divisore con le regole ordinarie, si otterranno de' quoti parziali dalla unione de' quali risulta il quoto totale che si cerca.

9. Ci resta ora a dividere un numero complesso per un altro ancor complesso, al che ci condurrà la seguente questione.

Si sono spesi 11 lire, 7 soldi e 3 denari per 5 tese e 2 piedi di lavoro: si dimanda il prezzo di ogni tesa.

Se conoscessimo il prezzo di una tesa, ripetendolo 5 volte e  $\frac{2}{3}$ , avremmo il prezzo delle 5 tese e 2 piedi: e questo dovrebbe essere 11 lire, 7 soldi e 3 denari. È chiaro dunque che la somma proposta è un prodotto di cui uno de' fattori è il numero astratto 5 e  $\frac{2}{3}$ . Ma quando si conosce il prodotto ed uno de' fattori, si rinviene l'altro dividendo il prodotto pel fattore dato: adunque la presente questione si riduce a dividere 11 lire, 7 soldi e 3 denari per 5 e  $\frac{2}{3}$ , ossia per  $\frac{16}{3}$ , riducendo l'intero e la frazione ad una sola frazione ( v. art. 75 ).

Abbiamo veduto nell' articolo 78 che per di-

vedere un intero per una frazione, basta moltiplicarlo per la frazione rovesciata: adunque converrà moltiplicare 11 lire, 7 soldi e 3 denari per  $\frac{3}{16}$ .

Ora la moltiplicazione di questo numero per 3 si eseguirà secondo la regola data nell'art. 2 di questo appendice; ed avremo per risultamento 54 lire, 1 soldo e 9 denari. Si divida questo prodotto per 16, ed otterremo per quoziente 2 lire, 2 soldi, 7 denari e  $\frac{3}{16}$ .

10. Si vede dall' addotto esempio che la divisione di un numero complesso per un altro ancor complesso, si riduce alla divisione di un numero complesso per un numero incompleto, solo che si cambi il divisore in una frazione astratta la quale dovrà ridursi ai suoi minori termini, tutte le volte che si può, per maggior semplicità.

11. Ecco una questione simile alla precedente: per 18 canne, 5 palmi, 7 oncie e 2 minuti di lavoro si è speso 148 lire, 12 soldi e 4 denari; si dimanda il prezzo di una canna.

Riflettendo che 5 palmi valgono  $\frac{1}{4}$  di 1 canna, 7 oncie  $\frac{7}{96}$  di 1 canna, e 2 minuti  $\frac{2}{1440}$  ossia  $\frac{1}{720}$  di 1 canna, è chiaro, che la questione si riduce a partire 148 lire, 12 soldi e 4 denari pel numero astratto 18 più  $\frac{1}{4}$  più  $\frac{7}{96}$  più  $\frac{1}{720}$ ; e il quoto sarà composto di unità della medesima specie del dividendo, cioè di lire, soldi e denari.

Per far dipendere questa questione dalla divisione di un numero complesso per un altro incompleto, ridurremo 18 e le frazioni che lo accompagnano ad una sola frazione nel seguente

modo. La frazione  $\frac{4}{9}$  è la medesima che  $\frac{67}{90}$ , essendosi moltiplicati per 12 ambidue i termini: onde  $\frac{4}{9}$  e  $\frac{7}{90}$  faranno  $\frac{67}{90}$ . Moltiplicando i termini di quest'ultima frazione per 10, e quelli della frazione  $\frac{4}{90}$  per 4, avremo per risultamenti  $\frac{670}{900}$  o  $\frac{4}{900}$ ; la somma de' quali è  $\frac{674}{900}$  ossia  $\frac{337}{450}$ . Riduciamo 18 e  $\frac{337}{450}$  ad una sola frazione, ed avremo  $\frac{8217}{4500}$ . Sicchè l'operazione si riduce a dividero 148 lire, 12 soldi e 4 denari per la frazione  $\frac{8217}{4500}$ ; cioè a moltiplicare 148 lire, 12 soldi cc. per 480 e a partirne il prodotto per 8977.

Un tal prodotto, trovato secondo la regola dell' articolo 2 di questo appendice, è 71336 lire. Quanto alla divisione eccone, l'operazione figurata,

Divid. 71336 <sup>li.</sup> 0 <sup>sol.</sup> 0 <sup>den.</sup> Divis..... 8977

|        |                                                                |
|--------|----------------------------------------------------------------|
| 8497   | Quoto.. 7 <sup>li.</sup> 18 <sup>sol.</sup> 11 <sup>den.</sup> |
| 20     |                                                                |
| 169940 |                                                                |
| 8354   |                                                                |
| 12     |                                                                |
| 16708  |                                                                |
| 8454   |                                                                |
| 100248 |                                                                |
| 1501   |                                                                |

Adunque ogni canna vale 7 lire, 18 soldi, 11 denari e  $\frac{1501}{8977}$  di denaro.

12. I due anzidetti esempj sono sufficienti a fare vedere, come, in tutti gli altri casi della divisione di un numero complesso per un altro parimente complesso, essa si potrà sempre ridurre alla divisione di un numero complesso per un numero incompleto.

13. Vi è ancora un'altra maniera di fare la moltiplicazione e la divisione di due numeri complessi, ed è quella di ridurli ad unità della loro minima specie: da ciò risulteranno due espressioni frazionarie, sulle quali si opererà secondo le regole date negli articoli 77 e 78. Vogliasi, per esempio, moltiplicare 13 canne, 2 palmi, 9 once e 3 minuti per 7 lire, 11 soldi e 9 denari.

Poichè 1 canna vale 8 palmi, ed 1 palmo 12 once, ed 1 oncia 5 minuti; il palmo sarà  $\frac{2}{3}$  di canna, l'oncia  $\frac{1}{6}$  di canna, ed il minuto  $\frac{1}{60}$  di canna. Mettendo dunque in frazioni ordinarie le unità del primo fattore, avremo 13 più  $\frac{2}{3}$  più  $\frac{1}{6}$  più  $\frac{1}{60}$ . Similmente valendo 1 lira 20 soldi, ed il soldo 12 denari, sarà il soldo uguale a  $\frac{1}{20}$  di lira, ed il denaro uguale a  $\frac{1}{240}$  di lira; onde le unità del secondo fattore saranno 7 più  $\frac{11}{20}$  più  $\frac{9}{240}$ . Ora egli è facile di vedere che ciascuno de' due fattori si può ridurre ad una sola frazione. Ed in vero, le 13 canne si convertiranno in  $\frac{6240}{480}$  moltiplicando e dividendo 13 per 480; la frazione  $\frac{2}{3}$  addiverrà  $\frac{160}{480}$  moltiplicandone i due suoi termini per 60; e la frazione  $\frac{1}{6}$ , colla moltiplicazione de' due suoi termini per 5, sarà  $\frac{40}{480}$ : sicchè il primo fattore sarà  $\frac{6440}{480}$  più  $\frac{200}{480}$

più  $\frac{44}{111}$  più  $\frac{1}{111}$ , ossia  $\frac{441}{111}$ . Parimenti il secondo fattore si ridurrà ad una sola frazione, moltiplicando e dividendolo prima 7 per 240, ciò che darà  $\frac{666}{111}$ , indi moltiplicando per 12 i termini della frazione  $\frac{11}{11}$ , ciò che darà  $\frac{111}{111}$ ; onde il secondo fattore sarà  $\frac{666}{111}$  più  $\frac{111}{111}$  più  $\frac{9}{111}$ , ossia  $\frac{777}{111}$ . Adunque la questione si riduce a moltiplicare tra loro le due frazioni  $\frac{441}{111}$  e  $\frac{777}{111}$ . Ma prima di effettuare la moltiplicazione, cerchiamo di ridurre le due frazioni a maggior semplicità. La frazione  $\frac{441}{111}$  si converte in  $\frac{567}{111}$ , dividendone i termini per 24; e  $\frac{777}{111}$  si cambia in  $\frac{667}{111}$ , dividendone i due termini per 3. Ora moltiplicando  $\frac{567}{111}$  per  $\frac{667}{111}$ , otterremo  $\frac{378009}{12321}$ , pel prodotto richiesto, ossia 101  $\frac{469}{12321}$ . Le unità intere 101 e la frazione che le accompagna, sono della medesima specie del moltiplicando il quale sarà fissato dallo stato della questione.

Cosicchè se avessimo proposto di sapere quante lire, quanti soldi ec. si debbano spendere per 15 canne, 2 palmi, 9 once e 3 minuti, valendo ogni canna 7 lire più 11 soldi più 9 denari; il nostro prodotto sarebbe composto di lire, soldi e denari. Esso sarebbe 101 lire, 5 soldi, 10 denari e  $\frac{7}{11}$ , come ognuno può assicurarsene riducendo 469 lire in soldi, e poi dividendolo ciò che risulta per 1600; e riducendo il resto di questa divisione in denari, e dividendone il risultamento anche per 1600.

Ma se la questione fosse proposta in questi termini: canne 15, palmi 2, once 9 e minuti 3 valendo 1 lira; con 7 lire più 11 soldi più

9 denari quante canne, quanti palmi ec. si avranno? Allora il prodotto sarà composto di canne, palmi ec. Quindi dopo avere ricavato le 101 canne, dobbiamo risolvere 469 canne in palmi, e dividere il risultamento 3752 per 1600: avremo 2 palmi, e 552 di resto; riducendo 552 palmi in once, e dividendo il prodotto 6624 anche per 1600, avremo 4 once, col resto 224: riducendo finalmente 224 once in 1120 minuti, e dividendo questo numero anche per 1600, avremo  $\frac{7}{10}$  di minuto. Sicchè, nella proposta questione, il prodotto è 101 canne, 2 palmi, 4 once e  $\frac{7}{10}$  di minuto.

14. Debbaasi dividere 124 lire, 13 soldi e 7 denari per 5 tese, 2 piedi e 4 pollici.

Riduciamo prima tanto il dividendo quanto il divisore ad una sola frazione, lo che si farà nel seguente modo.

Perciocchè 7 denari sono  $\frac{7}{12}$  di soldi, ed ogni soldo è  $\frac{1}{12}$  di lira, saranno 7 denari uguali a  $\frac{7}{144}$  di lira, mentre 13 soldi sono  $\frac{13}{12}$  di lira, ossia  $\frac{156}{144}$  di lira, giacchè altro non si è fatto che moltiplicare per 12 i termini della frazione  $\frac{13}{12}$ . La somma di queste due frazioni è  $\frac{163}{144}$  di lira: onde il succennato dividendo si converte in 124  $\frac{163}{144}$  lire; e riducendolo ad una sola frazione, secondo quel che si è detto nella fine dell'articolo 71, avremo  $\frac{17652}{144}$  lire. Si rifletterà ancora che 4 pollici sono  $\frac{4}{12}$  di piede, e che essendo 1 piede uguale ad  $\frac{1}{6}$  di tesa, 4 pollici sono  $\frac{4}{72}$  di tesa, e 2 piedi sono  $\frac{2}{3}$  di tesa ovvero  $\frac{48}{72}$ : onde 4 pollici e 2 piedi fanno  $\frac{52}{72}$  di tesa oppure  $\frac{7}{9}$  di te-

sa, dividendo per 4 i termini della frazione  $\frac{7}{12}$ . Sicchè il dato divisore addiviene  $5 \frac{7}{12}$  tese ossia  $\frac{65}{12}$  tese, riducendo l'intero 5 e la frazione  $\frac{7}{12}$  ad una sola frazione. La nostra questione adunque sarà risolta sol che si divida la frazione  $\frac{29925}{240}$  per  $\frac{65}{12}$ , ciò che si farà secondo l'articolo 78, ed avremo per quoziente  $\frac{29925 \text{ per } 12}{240 \text{ per } 65}$ . Ma si può dividere per 12 sì il numeratore che il denominatore, lo che cangia la frazione  $\frac{29925 \text{ per } 12}{240 \text{ per } 65}$  in  $\frac{29925}{40 \text{ per } 65}$  ossia  $\frac{29925}{2600}$ ; e ricavandone gl'interi, avremo 22  $\frac{445}{2600}$ . Dovendo il quoto essere composto di unità della medesima specie del dividendo, 22  $\frac{445}{2600}$  esprimerà tese: il perchè riducendo il numeratore in piedi, pollici e linee, come tante volte si è praticato, si troverà il quoto richiesto essere 22 tese, 1 piede, 11 pollici, 9 linee e  $\frac{452}{2600}$  di linea ossia  $\frac{213}{260}$  di linea.

F I N E.

# ERRORI

# CORREZIONI.

| Pag. |     | vers.           |                       |
|------|-----|-----------------|-----------------------|
| 158. | 9.  | 2 $\frac{1}{2}$ | leggi 3 $\frac{1}{2}$ |
| 173. | 16. | 266             | 26                    |
| Idem | 25. | 100             | 1000                  |
| 194. | 15. | 336             | 366.                  |



575814



6. 2. 1. 1

